

ENTRELAACEMENT D'ALGÈBRES DE LIE

BARBEN-JEAN COFFI-NKETSIA* ET LABIB HADDAD

ENGLISH ABTRACT. **Wreath product for Lie algebras.** Full details are given for the definition and construction of the wreath product $W(A, B)$ of two Lie algebras A and B , in the hope that it can lead to the definition of a suitable Lie group to be the wreath product of two given Lie groups. In the process, quite a few new notions are needed, and introduced. Such are, for example : Formal series with variables in a vector space and coefficients in some other vector space. Derivation of a formal series relative to another formal series. The Lie algebra of a vector space. Formal actions of Lie algebras over vector spaces. The basic formal action of a Lie algebra over itself (as a formal version of the analytic aspect of the infinitesimal operation law of a Lie groupuscul). More generally, relative to any given formal action d of the Lie algebra B over a vector space Y , the wreath product $W(A, B; d)$ is defined. When d is the basic action of B over itself, the special case $W(A, B)$ is recovered. Main features are : A description of the triangular actions of the wreath products $W(A, B; d)$ over product vector spaces $X \times Y$. A Kaloujnine-Krasner type theorem : In essence, it says that all Lie extensions C of the Lie algebra B by the Lie algebra A are, indeed, subalgebras of their wreath product $W(A, B)$. A moderately detailed english summary of the paper can be found in [7, p. 9-15].

0. Introduction.
1. Séries formelles.
2. Symétrisation.
3. Dérivation suivant une série formelle.
4. L'algèbre de Lie $S(X)$ d'un espace vectoriel X .
5. Action d'une algèbre de Lie sur un espace vectoriel.
6. L'exemple originel.
7. Produits d'entrelacements.
8. Action triangulaire.
9. Action fondamentale d'une algèbre de Lie sur elle-même.
10. Produit d'entrelacement de deux algèbres de Lie.
11. Représentation des extensions dans le produit d'entrelacement.

*À Coffi, décédé pendant la préparation et avant l'achèvement de ce texte, un amical adieu. *Haddad*

0. INTRODUCTION

Le produit d'entrelacement ("wreath product" en anglais) de deux groupes (abstrait) quelconques, A et B , est une notion devenue classique : voir, par exemple, Neumann [6]. Voici, succinctement, comment on l'introduit.

Considérons comme produit de copies du groupe A , l'ensemble A^B de toutes les applications de B dans A est, lui-même, un groupe. Soit $\sigma : B \times A^B \rightarrow A^B$ l'application $(b, f) \mapsto \sigma_b(f)$ où $\sigma_b(f) \in A^B$ est l'application de B dans A définie par $(\sigma_b(f))(x) = f(xb)$ pour tout $x \in B$. Chacun des σ_b est alors un automorphisme du groupe A^B et l'on vérifie que l'application $\sigma : B \rightarrow \text{Aut}(A^B)$ ainsi définie est un homomorphisme du groupe B dans le groupe $\text{Aut}(A^B)$ des automorphismes du groupe A^B .

Le produit d'entrelacement de B par A est alors défini comme étant le produit semi-direct $W(A, B) = A^B \rtimes_\sigma B$ du groupe B par le groupe A^B suivant l'homomorphisme σ . Plus précisément, pour deux éléments (f, b) et (g, c) de $W(A, B)$, on a

$$(f, b)(g, c) = (f \sigma_b(g), bc).$$

On introduit une opération, dite *triangulaire*, du groupe $W(A, B)$ sur le produit cartésien $A \times B$, naturellement, en posant $(x, y).(f, b) = (x f(y), yb)$ pour chaque opérateur $(f, b) \in A^B \times B$ et chaque point $(x, y) \in A \times B$. Ce faisant, on fait ainsi opérer ce groupe à *droite*.

L'une des propriétés du produit d'entrelacement est connue sous le nom de théorème de Kaloujnine-Krasner : tout groupe C extension de B par A est un sous-groupe du produit d'entrelacement $W(A, B)$.

M. Krasner a posé le problème suivant au premier des deux auteurs du texte présent :
Comment définir un produit d'entrelacement dans le cas des groupes de Lie?

Autrement dit, lorsque A et B sont des groupes de Lie, comment peut-on distinguer un sous-groupe particulier de $W(A, B)$, assez *convenable* pour en faire un groupe de Lie, et de manière *raisonnable*.

Le problème semblait assez ardu, difficile et hors de portée. A notre connaissance, il n'a d'ailleurs toujours pas été résolu. Aussi, nous sommes-nous attelé, tout d'abord, au problème qui nous a paru plus simple, celui du produit d'entrelacement d'algèbres de Lie. On passait ainsi du domaine *analytique et géométrique*, très riche, au domaine *algébrique* plus accessible. Il n'était pas trop hasardeux de penser que l'algèbre de Lie d'un éventuel groupe de Lie qui serait un produit d'entrelacement de deux groupes de Lie donnés serait le produit d'entrelacement des algèbres de Lie de ces deux groupes ou, pour le moins, une sous-algèbre *convenable* de ce produit d'entrelacement.

Partis en quête du *véritable* produit d'entrelacement de deux algèbres de Lie, nous avons suivi un chemin sinueux dont il serait trop long, ici, de décrire en détail les étapes. Qu'il suffise de dire ceci, pour le moment.

D'un côté, la route montait vers un hypothétique produit d'entrelacement de deux groupes de Lie, entrevu, à la manière des groupes abstraits, de l'autre, elle redescendait vers les algèbres de Lie correspondantes dont on essayait de deviner les structures et l'enlacement...

Nous avons rencontré, à mi-chemin, entre l'analytique et l'algébrique, la notion de loi d'opération infinitésimale et celle de groupuscule de Lie. Après de multiples et infructueux essais, elles nous ont permis de dégager la voie et d'ouvrir le passage. Le Traité de Bourbaki, et ses très précieux exercices, nous ont grandement facilité la tâche.

On passerait directement du cas des groupes abstraits à celui des algèbres de Lie, tout simplement, en remplaçant le groupe A^B par une algèbre de Lie $A[[B]]$, convenable, et en faisant jouer le rôle du groupe $\text{Aut}(A^B)$ des automorphismes du groupe A^B par l'algèbre de Lie des dérivations de $A[[B]]$.

Pour cela, il suffisait de trouver les *bonnes* définitions pour $A[[B]]$ et sa structure d'algèbre de Lie. Ce que nous fîmes, en choisissant pour $A[[B]]$ le statut d'une algèbre de Lie de séries formelles.

Dans le texte qui suit, nous donnons toutes les définitions et les détails nécessaires pour la construction du produit d'entrelacement de deux algèbres de Lie, sur un corps commutatif, de caractéristique nulle, quelconque.

Dans un texte antérieur, "Produit d'entrelacement et action triangulaire d'algèbres de Lie" [7], nous avons donné un résumé assez complet de ce qui va suivre. Pour la concordance de nos deux textes, nous utilisons, de nouveau, les numéros de renvoi sous la forme $\langle n \rangle$.

Les détails sont nombreux avant d'arriver au produit d'entrelacement de deux algèbres de Lie A et B sous la forme $W(A, B) = A[[B]] \times B$.

Parmi ces détails, on signalera l'introduction de quelques notions nouvelles. En particulier, l'ensemble $X[[Y]]$ des séries formelles, à variables dans un espace vectoriel Y , donné, et coefficients dans un autre espace vectoriel X , et dont $A[[B]]$ est un cas particulier. La dérivation d'une série formelle suivant une autre. L'algèbre de Lie $S(X) = X[[X]]$ d'un espace vectoriel X quelconque. Les actions des algèbres de Lie sur les espaces vectoriels. L'action fondamentale d'une algèbre de Lie sur elle-même (version formelle de l'aspect analytique de la loi d'opération infinitésimale d'un groupuscule de Lie).

On trouvera également, ici, la définition d'un produit d'entrelacement plus général, $W(A, B; d) = A[[Y]] \times B$, relatif à une action formelle quelconque d de l'algèbre de Lie B

sur un espace vectoriel donné Y . Lorsque d est l'action fondamentale de B sur elle-même, on retrouve le cas particulier du produit $W(A, B)$.

Signalons les deux points saillants suivants. Une description des actions *triangulaires* des produits d'entrelacement $W(A, B; d)$ sur les espaces vectoriels produits $X \times Y$. Ainsi qu'un théorème du type Kaloujnine-Krasner : toute algèbre de Lie C extension de B par A se plonge dans l'algèbre de Lie $W(A, B)$. Ce plongement, loin d'être banal, n'est pas unique. On verra, au dernier paragraphe, la formule remarquable de ces plongements.

Un dernier mot encore au sujet du problème posé initialement par M. Krasner. Dans le cas réel ou complexe, même lorsque A et B sont, toutes deux, de dimension finie, il sera sans doute malaisé de remonter directement du produit d'entrelacement de ces deux algèbres de Lie à un groupe de Lie G dont l'algèbre de Lie serait $L(G) = W(A, B)$. En effet, la dimension de $W(A, B)$ est toujours infinie (sauf si A ou B est triviale). On pourra probablement remonter jusqu'à un groupuscule de Lie. Mais, au-delà, il faudrait prendre pour G un groupe de Lie banachique, porté par une variété analytique modelée sur un espace de Banach (voire de Hilbert) de dimension infinie, par exemple, ou sélectionner une sous-algèbre de dimension finie, *convenable*, de l'algèbre de Lie $W(A, B)$. Tout cela demeure en dehors du champ de ce modeste essai.

Tout au long de ce texte, K désigne un corps commutatif **infini** quelconque; il sera de caractéristique nulle à partir du paragraphe **9**. De même, E, F, X, Y , désigneront des espaces vectoriels sur K , et A, B, C , désigneront des K -algèbres de Lie. Par m, n, r , on désignera des entiers naturels quelconques, autrement dit des entiers ≥ 0 . Pour chaque m , on désignera par $L_m(E; F)$ l'ensemble de toutes les applications m -linéaires de E à valeurs dans F .

Tous les espaces vectoriels ainsi que toutes les algèbres de Lie seront supposés avoir K comme corps des scalaires.

On a essayé d'être le plus complet possible, pour faciliter la lecture du texte, en donnant tous les détails utiles à sa compréhension (frisant parfois, sans doute, la surcharge).

1. SÉRIES FORMELLES

Bourbaki, dans un court APPENDICE [1, p. 88-89], expose les notions de polynômes-continus et de séries formelles pour les espaces vectoriels polynormés, en passant par les applications **multilinéaires continues**. En imitant cette démarche, nous l'adaptions ci-dessous au cas purement algébrique des espaces vectoriels quelconques (et la développons pour nos besoins).

1.1. Polynômes homogènes. On dira qu'une application $f : E \rightarrow F$ est un **polynôme homogène** de degré m , à variables dans E et coefficients dans F , lorsqu'il existe au moins une application m -**linéaire** $u : E^m \rightarrow F$ telle que

$$f(x) = u(x, \dots, x) \text{ pour tout } x \in E.$$

On dira alors que f est **déterminé** par u .

On désignera par $F[E]_m$ l'ensemble de ces polynômes homogènes de degré m . C'est naturellement un espace vectoriel sur K .

1.2. Remarques.

1°. Le corps K étant infini, la somme

$$\sum_m F[E]_m,$$

considérée dans le K -espace vectoriel F^E de toutes les applications de E dans F , est une **somme directe**.

En effet, soit $f = f_0 + f_1 + \dots + f_m + \dots + f_r$ où $f_m \in F[E]_m$ pour chaque m . On suppose que $f(x) = 0$ pour tout $x \in E$. Alors, pour tous $\lambda \in K$ et $x \in E$, on aura

$$f(\lambda x) = f_0(x) + \lambda f_1(x) + \dots + \lambda^r f_r(x) = 0$$

et, K étant infini, on aura donc

$$f_0(x) = f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0 \text{ pour tout } x \in E. \quad \square$$

2°. **Contre-exemple.** Bien entendu, sur le corps premier \mathbb{F}_p , les deux polynômes

$$x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p \text{ de degré } p$$

et

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \text{ de degré } 1$$

sont égaux !

1.3. Polynômes et séries formelles.

On posera

$$F[E] = \bigoplus_m F[E]_m, \quad F[[E]] = \prod_m F[E]_m.$$

On appelle alors **polynôme** (resp. **série formelle**) à variables dans E et coefficients dans F tout élément de $F[E]$ (resp. de $F[[E]]$).

Ainsi, une série formelle $f \in F[[E]]$ est de la forme

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_m + \cdots$$

où chaque f_m , appelé **composante homogène** de degré m de f , appartient à $F[E]_m$.

1.3.1. Exemples primaires. Que sont les polynômes homogènes et les séries formelles dans le cas où les deux espaces vectoriels E et F sont de dimensions finies?

Soient $E = K^r$ et $F = K^s$.

Lorsque $s = 1$, l'ensemble des polynômes $F[E]$ s'identifie à $K[x_1, \dots, x_r]$, ensemble des polynômes (classiques) à r variables et à coefficients dans le corps K . De même, $F[[E]]$ s'identifie alors à $K[[x_1, \dots, x_r]]$, ensemble des séries formelles (classiques) aux r variables x_1, \dots, x_r , à coefficients dans le corps K . Ainsi, pour s quelconque, chaque $f \in F[[E]]$ s'identifie à un s -uple (f_1, \dots, f_s) de séries formelles $f_i \in K[[x_1, \dots, x_r]]$.

Autrement dit, $F[[E]]$ s'identifie, canoniquement, au produit de s copies de $K[[x_1, \dots, x_r]]$.

$$(K^s)[[K^r]] = (K[[x_1, \dots, x_r]])^s = \prod_{i=1}^s K_i[[x_1, \dots, x_r]].$$

1.3.2. Sommabilité.

On commence par observer ceci. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de séries formelles

$$f_i \in F[[E]] \quad , \quad f_i = \sum_m f_{i,m} \quad , \quad f_{i,m} \in F[E]_m.$$

Lorsque I , l'ensemble des indices, est fini, la somme $\sum_{i \in I} f_i$ est bien définie. Plus généralement, pour I quelconque, fini ou infini, soit

$$I(m) = \{i \in I : f_{i,m} \neq 0\}.$$

Si tous les $I(m)$ sont finis, on pose $g_m = \sum_{i \in I(m)} f_{i,m}$, de sorte que $g_m \in F[E]_m$. On dit alors que la famille est **sommable** et que sa somme est

$$\sum_{i \in I} f_i = g_0 + g_1 + \cdots + g_m + \cdots$$

1.3.3. Question de méthode. Dans la suite, pour établir certains des nombreux résultats sur les séries formelles, on utilisera souvent la même méthode : elle consiste à établir ce résultat, d'abord pour les polynômes homogènes (en utilisant les applications multilinéaires qui les déterminent) puis, en l'appliquant à leurs composantes homogènes, à l'étendre aux séries formelles elles-mêmes.

Dans la plupart des cas, on a donné tous les détails des calculs, assez arides et fastidieux, pour le confort du lecteur, ainsi que pour notre propre tranquillité ...

1.4. Séries formelles doubles.

Comme dans le cas classique, on peut introduire la notion plus générale de série formelle **double** à variables dans deux espaces vectoriels X et Y , et à coefficients dans un troisième espace F .

Voici comment on procède.

On désigne par $L_{(m,n)}(X, Y; F)$ l'ensemble de toutes les applications $u : X^m \times Y^n \rightarrow F$ qui sont $(m + n)$ -multilinéaires, autrement dit, telles que $u(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ soit linéaire par rapport à chacune des variables $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$.

On dira qu'une application $f : X \times Y \rightarrow F$ est un polynôme homogène de **bidegré** (m, n) , à variables dans (X, Y) et coefficients dans F , lorsqu'il existe au moins un élément $u \in L_{(m,n)}(X, Y; F)$ tel que

$$f(x, y) = u(x, \dots, x, y, \dots, y) \text{ pour tous } x \in X, y \in Y.$$

On désignera par $F[X, Y]_{(m,n)}$ l'ensemble de ces polynômes homogènes de bidegré (m, n) . C'est naturellement un espace vectoriel sur K .

On posera $F[[X, Y]] = \prod_{(m,n)} F[X, Y]_{(m,n)}$.

On appellera série formelle double, à variables dans (X, Y) et coefficients dans F , tout élément de $F[[X, Y]]$.

1.5. Identifications naturelles et canoniques.

On considère $T = F[[X]]$ et on écrit T_m pour $F[X]_m$.

On fera les identifications suivantes :

1. $L_{(m,n)}(X, Y; F)$ est identifié avec $L_n(Y; L_m(X; F))$.
2. $F[X, Y]_{(m,n)}$ est identifié avec $T_m[Y]_n$.

3. $F[[X, Y]]$ est identifié avec $T[[Y]]$.

4. $F[[X \times Y]]$ est identifié avec $F[[X, Y]]$.

Ainsi

5. $F[[X \times Y]]$ est identifié avec $T[[Y]]$.

Voici les détails essentiels de ces identifications. Le lecteur ne rencontrera pas de difficulté à les compléter par des calculs, s'il le juge utile.

1.5.1. Soit $u : X^m \times Y^n \rightarrow F$ une application $(m + n)$ -multilinéaire. A chaque $y = (y_1, \dots, y_n) \in Y^n$ correspond une application $u_y : X^m \rightarrow F$ définie par

$$u_y(x_1, \dots, x_m) = u(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n).$$

Ainsi, $u_y \in L_m(X; F)$. Soit alors \bar{u} l'application de Y^n dans $L_m(X; F)$ qui, à chaque $y \in Y^n$, fait correspondre u_y , de sorte que $\bar{u} \in L_n(Y; L_m(X; F))$. L'application $u \mapsto \bar{u}$ est alors un **isomorphisme** naturel, canonique, entre les deux espaces vectoriels $L_{(m,n)}(X, Y; F)$ et $L_n(Y; L_m(X; F))$.

De cette première identification découle simplement la suivante.

1.5.2. Soit $f \in F[X, Y]_{(m,n)}$ un polynôme homogène. Il est déterminé par un élément $u \in L_{(m,n)}(X, Y; F)$. Le polynôme \bar{f} déterminé par \bar{u} appartient donc à $T_m[Y]_n$. De plus \bar{f} ne dépend que de f et pas du choix de u !

L'application $f \mapsto \bar{f}$ est un **isomorphisme** entre les deux espaces vectoriels

$$F[X, Y]_{(m,n)} \quad \text{et} \quad T_m[Y]_n.$$

Retenons les deux identités suivantes :

$$\bar{u}(y_1, \dots, y_n)(x_1, \dots, x_m) = u(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$$

$$\bar{f}(y)(x) = f(x, y).$$

De cette seconde identification, on passe à la troisième comme suit.

1.5.3. Soit $f = \sum_{(m,n)} f_{(m,n)} \in F[[X, Y]]$. Pour chaque n , soit $g_n = \sum_m \bar{f}_{(m,n)}$, de sorte que $g_n \in T[Y]_n$.

On pose alors $\bar{f} = \sum_n g_n$ et on remarque que cette notation est en accord avec celle qui a été adoptée ci-dessus dans le cas où f est un polynôme homogène. On a donc $\bar{f} \in T[[Y]]$, et l'application $f \mapsto \bar{f}$ est un **isomorphisme** entre les deux espaces vectoriels

$$F[[X, Y]] \quad \text{et} \quad T[[Y]].$$

Elle est, en effet, linéaire et **injective**. Il suffit de se convaincre qu'elle est, également, **surjective**.

Pour cela, on se donne

$$g \in T[[Y]] \quad , \quad g = \sum_m g_m \quad , \quad g_m \in T[Y]_m.$$

Pour $y \in Y$, on a

$$g_m(y) \in T = F[[X]] \quad , \quad g_m(y) = \sum_n g_{m,n}(y) \quad , \quad g_{m,n}(y) \in F[X]_n.$$

Pour chaque $x \in X$, on a

$$g_{m,n}(y)(x) \in F.$$

On pose alors

$$f_{m,n}(x, y) = g_{m,n}(y)(x).$$

On sait que l'on a

$$f_{m,n} \in F[X, Y]_{(m,n)} \quad \text{et} \quad g_{m,n} = \bar{f}_{m,n}.$$

Ainsi, en posant

$$f = \sum_{(m,n)} f_{(m,n)} \in F[[X, Y]],$$

on a

$$g = \bar{f}.$$

A nouveau, et formellement cette fois, on peut écrire

$$\bar{f}(y)(x) = f(x, y).$$

Remarque. Comme on l'a vu pour les polynômes simples (ci-dessus **1.2**), ici aussi la somme $\sum_{(m,n)} F[X, Y]_{(m,n)}$ dans l'espace vectoriel $F^{X \times Y}$ est une **somme directe**.

En effet, soit $f = \sum_{m+n \leq r} f_{(m,n)}$ où $f_{(m,n)} \in F[X, Y]_{(m,n)}$. On suppose que $f(x, y) = 0$ pour tous $x \in X$ et $y \in Y$. On veut montrer que $f_{(m,n)} = 0$ pour tout (m, n) , autrement dit, $f_{(m,n)}(x, y) = 0$ pour tous x, y, m, n .

Pour chaque $\lambda \in K$, $\mu \in K$, $x \in X$, $y \in Y$, on a $f(\lambda x, \mu y) = 0$. Or,

$$f(\lambda x, \mu y) = \sum_{(m,n)} f_{(m,n)}(\lambda x, \mu y) = \sum_{(m,n)} \lambda^m \mu^n f_{(m,n)}(x, y).$$

D'où la conclusion. \square

On en vient à la quatrième identification.

1.5.4. Identification de $F[[X \times Y]]$ avec $F[[X, Y]]$. Elle résultera de l'identification de

$$F[X \times Y]_r \text{ avec } \bigoplus_{m+n=r} F[X, Y]_{(m,n)} = F[X, Y]_r.$$

On pose $Z = X \times Y$ et on identifie X au sous-espace $X \times \{0\} \subset Z$, et Y au sous-espace $\{0\} \times Y \subset Z$. Soit $f \in F[X \times Y]_r$.

On considère $\hat{f}(x, y) = f(x + y)$.

1.5.4.1. On montre que $\hat{f} \in F[X, Y]_r$.

En effet : f est déterminé par un $u \in L_r(Z; F)$ et, pour $z = x + y$, $x \in X$, $y \in Y$, on a

$$f(z) = u(z, \dots, z) = u(x + y, \dots, x + y).$$

Or,

$$u(z_1, \dots, z_r) = u(x_1 + y_1, \dots, x_r + y_r) \text{ où } z_i = x_i + y_i.$$

Soit $R = \{1, \dots, r\}$. Pour chaque partie $M \subset R$, on considère le sous-espace Z_M de Z^r formé des éléments $z = (z_1, \dots, z_r)$ où

$$z_i \in X \text{ si } i \in M,$$

$$z_i \in Y \text{ si } i \notin M.$$

La restriction de u à Z_M définit ainsi naturellement une application $(m + n)$ -multilinéaire

$$u_M : X^m \times Y^n \rightarrow F, \quad m = \text{Card}(M).$$

A son tour, u_M détermine un polynôme homogène $f_M \in F[X, Y]_{(m,n)}$,

$$f_M(x, y) = u_M(x, \dots, x, y, \dots, y).$$

Or

$$u(x + y, \dots, x + y) = \sum_M u_M(x, \dots, x, y, \dots, y).$$

De sorte que $\hat{f}(x, y) = f(x + y) = \sum_M f_M(x, y)$, donc $\hat{f} \in F[X, Y]_r$.

Visiblement, l'application ainsi définie de $F[X \times Y]_r$ dans $F[X, Y]_r$, qui associe \hat{f} à f , est **linéaire**.

1.5.4.2. Elle est aussi injective. Car si $\hat{f} \equiv 0$ alors $f(x + y) = \hat{f}(x, y) = 0$ pour tous x, y , autrement dit,

$$f(z) = 0 \text{ pour tout } z \in Z.$$

Donc $f = 0$.

1.5.4.3. Cette application est également surjective.

En effet, soit $f \in F[X, Y]_{(m,n)}$ déterminé par un $u \in L_{(m,n)}(X, Y; F)$. On définit alors $v : Z^r \rightarrow F$ par

$$v(z_1, \dots, z_r) = u(x_1, \dots, x_m, y_{m+1}, \dots, y_r)$$

où $z_i = (x_i, y_i)$. Ainsi $v \in L_r(Z; F)$.

Soit $g(z) = v(z, \dots, z)$. Cela définit un polynôme $g \in F[Z]_r$ et l'on a

$$\hat{g}(x, y) = g(x + y) = u(x, \dots, x, y, \dots, y) = f(x, y). \quad \square$$

Cela achève la quatrième identification. La cinquième découle des précédentes.

Bien entendu, ce que l'on vient de faire pour **deux** variables se généralise au cas d'un nombre fini quelconque de variables, celui des séries formelles **multiples**.

1.6. Sur la notation $f(x)$.

Soit $f \in F[E]$ un polynôme homogène déterminé par $u \in L_m(E; F)$. Pour chaque $x \in E$, l'élément $f(x) = u(x, \dots, x)$ est un vecteur de l'espace F . Plus généralement, lorsque $f \in F[E]$ est un polynôme quelconque, homogène ou non, pour chaque vecteur x de E , l'élément $f(x)$ est encore un vecteur de F . Autrement dit, f définit une application (polynômiale) $f : E \rightarrow F$.

Il n'en va plus nécessairement de même pour une **série** formelle $f \in F[[E]]$ quelconque. La notation $f(x)$ ne désigne alors pas toujours un vecteur de F . Elle est pourtant commode et on peut s'en servir (en abusant un peu) dans les questions de composition ou de **substitution**. En désignant encore cette série par la notation $f : E \rightarrow F$, on garde *métaphoriquement* l'idée d'une application f tout en sachant que $f(x)$ n'est pas un vecteur de F .

1.7. Substitution.

Etant données des séries formelles

$$f : X \rightarrow E, \quad g : E \rightarrow F,$$

on va montrer comment la composée $g(f)$ peut avoir un sens dans certains cas et qu'elle consiste à **substituer** f à y dans $g(y)$. On fera cela par étapes.

Substituer des polynômes homogènes dans une application multilinéaire.

On commence par se donner

$$u_i \in L_{n(i)}(X; E), \quad i = 1, \dots, m, \quad r = n(1) + \dots + n(m), \quad v \in L_m(E; F).$$

L'application composée $w = v(u_1, \dots, u_m)$ appartient alors à $L_r(X; F)$. On désigne par f_1, \dots, f_m, h , les polynômes homogènes déterminés, respectivement, par u_1, \dots, u_m, w , dont les degrés respectifs sont $n(1), \dots, n(m), r$. Le polynôme h n'est autre que le composé $v(f_1, \dots, f_m)$, on le voit immédiatement.

Substituer des séries formelles dans une application multilinéaire.

Plus généralement, on se donne m séries formelles f_1, \dots, f_m , où $f_i \in E[[X]]$. On définit la série formelle $v(f_1, \dots, f_m) = \sum_s h_s$ à l'aide de ses composantes

$$h_s = \sum_{n(1)+\dots+n(m)=s} v(f_{1,n(1)}, \dots, f_{m,n(m)})$$

où $f_{i,j}$ désigne la composante de degré j de f_i .

Substituer une série formelle dans un polynôme.

Soit $f \in E[[X]]$ une série formelle et $g \in F[E]$ un polynôme. Lorsque g est un polynôme homogène déterminé par $v \in L_m(E; F)$, on définit la série composée par $g(f) = v(f, \dots, f)$ qui ne dépend pas du choix de v , comme on le vérifie. Lorsque $g(x) = \sum_{m \leq r} v_m(x, \dots, x)$ est un polynôme quelconque, avec $v_m \in L_m(E; F)$, on écrit

$$g(f) = \sum_{m \leq r} v_m(f, \dots, f),$$

cette somme étant finie!

Substituer une série formelle dans une autre.

Soient

$$f : X \rightarrow E, \quad g : E \rightarrow F$$

des séries formelles. Pour chaque composante g_s de g , on considère la série formelle $g_s(f)$. La famille $(g_s(f))_s$ de ces séries formelles est sommable uniquement dans les deux cas suivants, où l'on peut donc écrire $g(f) = \sum_s g_s(f)$:

- (1) lorsque g est un polynôme car il s'agit alors d'une famille finie;
- (2) lorsque g n'est pas un polynôme et que la composante f_0 de degré 0 de f est nulle. Sinon, les $g_s(f_0)$ formeraient une famille infinie de constantes non nulles.

1.8. Restriction et extension des coefficients et des variables.

Chaque application linéaire $p : Y \rightarrow X$ est un polynôme homogène $p \in X[Y]_1$ de degré 1 et induit, par *fonctorialité*, une application linéaire *naturelle* de Y^m dans X^m et, partant, des applications linéaires

$$L_m(X; E) \rightarrow L_m(Y; E), \quad E[X]_m \rightarrow E[Y]_m, \quad \check{p} : E[[X]] \rightarrow E[[Y]].$$

L'application \check{p} respecte la *graduation* et, pour $f \in E[[X]]$, on a $\check{p}(f) = f(p)$ où l'on a substitué p dans la série formelle f .

De même, à chaque application linéaire $s : E \rightarrow F$ correspondent des applications linéaires *naturelles*

$$L_m(X; E) \rightarrow L_m(X; F), \quad E[X]_m \rightarrow F[X]_m, \quad \hat{s} : E[[X]] \rightarrow F[[X]].$$

L'application \hat{s} respecte aussi la *graduation* et, pour $f \in E[[X]]$, on a $\hat{s}(f) = s(f)$ où l'on a substitué la série formelle f dans s .

En un certain sens, on peut ainsi dire que le foncteur $E[[X]]$ est **contravariant** en X et **covariant** en E . On peut, également, voir les choses comme ceci : une extension $p : Y \rightarrow X$ des variables induit une projection \check{p} de $E[[X]]$ dans $E[[Y]]$; tandis qu'une extension $s : E \rightarrow F$ des coefficients induit une extension \hat{s} de $E[[X]]$ à $F[[X]]$.

Les deux applications \check{p} et \hat{s} commutent et leurs effets conjugués induisent une application linéaire $q : E[[X]] \rightarrow F[[Y]]$ où $q = \check{p} \circ \hat{s} = \hat{s} \circ \check{p}$.

On pourrait examiner ce foncteur de plus près, afin de voir comment se comportent les injections et les surjections. Nous ne le ferons pas ici car nous n'en avons pas l'usage. On se contentera de faire la seule observation suivante.

Lorsque l'on a

$$E = X, F = Y, p \circ s = \text{id}_E = \text{id}_X,$$

l'application q est injective et plonge ainsi $X[[X]]$ dans $Y[[Y]]$.

2. SYMÉTRISATION

Etant donnée une fonction de plusieurs variables, $f(x_1, \dots, x_m)$, à valeurs dans un groupe commutatif quelconque, une démarche habituelle de **symétrisation**, classique, consiste à lui associer la fonction symétrique $g(x_1, \dots, x_m)$ obtenue en faisant la somme de toutes les valeurs $f(x_{s(1)}, \dots, x_{s(m)})$ où s parcourt l'ensemble des permutations de l'ensemble fini $\{1, \dots, m\}$. On peut généraliser quelque peu cette démarche en définissant la (p_1, \dots, p_r) -symétrisée $\tilde{f}(z_1, \dots, z_r; p_1, \dots, p_r)$ de f comme étant la somme de toutes les valeurs $f(z_{s(1)}, \dots, z_{s(m)})$ où s parcourt l'ensemble des permutations **avec répétitions** de $\{1, \dots, r\}$ où chaque j est répété p_j fois. On explicite, ci-dessous, le cas particulier des applications f multilinéaires, pour les besoins de la suite, notamment dans la définition de la dérivation suivant les séries formelles, dans le paragraphe 3.

2.1. Le p -symétrisé d'une application m -linéaire.

Pour chaque $u \in L_m(E; F)$, $z \in E^r$, $p = (p_1, \dots, p_r) \in \mathbb{Z}^r$, on désigne par $\tilde{u}(z; p)$ la somme de tous les termes de la forme $u(z_{s(1)}, \dots, z_{s(m)})$ où s est une permutation avec répétitions de $\{1, \dots, r\}$ et dans laquelle j est répété exactement p_j fois (pour $j = 1, \dots, r$). S'il n'existe aucun terme de cette forme, on convient que $\tilde{u}(z; p) = 0$.

Remarque. On observera qu'avec cette convention, on a $\tilde{u}(z; p) = 0$ si $p \in \mathbb{Z}^r \setminus \mathbb{N}^r$ ou si $m \neq p_1 + \dots + p_r$.

2.2. Cas particulier.

Pour définir la dérivation suivant une série formelle, nous nous servirons, ci-dessous, du cas particulier de la symétrisation où $r = 2$, $p_1 = 1$, $p_2 = m - 1$.

Dans ce cas, $\tilde{u}((t, x); (1, m - 1))$ est la somme de tous termes de la forme $u(x_1, \dots, x_m)$ où tous les x_i sont égaux à x sauf **un** qui est égal à t . Bien entendu, si $m = 0$ alors cette somme est nulle.

On va établir le résultat suivant.

2.3. Théorème. $< 1 >$. Si des éléments u et v de $L_m(E; F)$ déterminent le même polynôme homogène, alors $\tilde{u} = \tilde{v}$.

Autrement dit, si

$$u(x, \dots, x) = v(x, \dots, x) \text{ pour tout } x \in E,$$

alors

$$\tilde{u}(z; p) = \tilde{v}(z; p) \text{ pour tous } z \in E^r, p \in \mathbb{Z}^r.$$

Pour établir ce théorème, on s'appuiera sur les deux résultats auxiliaires suivants.

2.4. Lemme. Soient b_0, b_1, \dots, b_m , une suite de vecteurs dans F et

$$g(t) = b_0 + tb_1 + \dots + t^m b_m \text{ pour chaque } t \in K.$$

On suppose que $g(t) = 0$ pour tout $t \in K$. Alors

$$b_0 = b_1 = \dots = b_m = 0.$$

En effet, on considère $(m+1)$ éléments distincts t_0, t_1, \dots, t_m , dans K . On a

$$g(t_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m, \text{ par hypothèse.}$$

Autrement dit,

$$b_0 + t_0 b_1 + t_0^2 b_2 + \dots + t_0^m b_m = 0$$

$$b_0 + t_1 b_1 + t_1^2 b_2 + \dots + t_1^m b_m = 0$$

$$\vdots$$

$$b_0 + t_m b_1 + t_m^2 b_2 + \dots + t_m^m b_m = 0$$

et la matrice $M = (t_i^j)$ est (un Vandermonde) **inversible**. D'où le résultat. \square

Remarque. Bien entendu, le lemme est encore vrai lorsque le corps K , sans être infini, possède au moins $(m+1)$ éléments distincts.

2.5. Corollaire. $< 2 >$.

Soit $g(x_1, \dots, x_r)$ un polynôme à coefficients dans F de degré m au plus :

$$g(x) = \sum_{p \in \mathbb{N}^r, |p| \leq m} x^p b_p.$$

On suppose que $g(x) = 0$ pour tout $x \in K^r$. Alors tous les coefficients b_p du polynôme g sont **nuls**.

En effet, on raisonne par récurrence sur l'entier r en utilisant le lemme précédent :

$g(x_1, \dots, x_{r-1}, t)$ est un polynôme en (x_1, \dots, x_{r-1}) de degré $\leq m$ à coefficients dans $F[t]$. \square

2.6. Remarque. Soient $u \in L_m(E; F)$ et $z \in E^r$. Voici une manière commode de tenir serrés en une même formule tous les termes $\tilde{u}(z; p)$ pour $p \in \mathbb{Z}^r$.

Pour chaque $t = (t_1, t_2, \dots, t_r) \in K^r$, on considère

$$x(t) = t_1 z_1 + t_2 z_2 + \dots + t_r z_r$$

et

$$f(t) = u(x(t), \dots, x(t)).$$

On a alors

$$f(t) = \sum_{p \in \mathbb{N}^r, |p|=m} t^p \tilde{u}(z; p)$$

en notation "multiindicielle" et où, par définition, $|p| = p_1 + \dots + p_r$.

On se souvient, en effet, que $\tilde{u}(z; p) = 0$ dans chacun des deux cas suivants :

(1) si $p \in \mathbb{Z}^r \setminus \mathbb{N}^r$,

(2) si $|p| \neq m$.

2.7. Démonstration du théorème 2.3. En considérant la différence $u - v$, il suffit d'établir le résultat dans le cas où $v = 0$.

On suppose donc donné $u \in L_m(E; F)$ tel que $u(x, \dots, x) = 0$ pour tout $x \in E$. On vient de montrer que

$$\tilde{u}(z; p) = 0 \text{ pour tous } z \in E^r, p \in \mathbb{N}^r.$$

Or, en reprenant les notations de la remarque précédente, on a

$$f(t) = u(x(t), \dots, x(t)) = 0 \text{ pour tout } t \in K.$$

On applique alors le **corollaire 2.5** au polynôme homogène $f(t)$ de degré m en t , à coefficients dans F . \square

2.8. Remarque. Lorsque $m!$ est inversible dans K , à chaque élément $u \in L_n(E; F)$ est associé son **symétrisé** $u^* \in L_m(E; F)$ que l'on définit comme suit :

$$u^*(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum_s u(x_{s(1)}, \dots, x_{s(m)}),$$

la somme étant prise pour toutes les permutations s de l'ensemble $\{1, \dots, m\}$. Ce symétrisé est une application m -linéaire **symétrique** de E dans F . Lorsque $f \in F[E]_m$ est déterminé par u , il est clair que f est également déterminé par ce symétrisé u^* , l'**unique** élément symétrique de $L_m(E; F)$ qui détermine f .

3. DÉRIVATION SUIVANT UNE SÉRIE FORMELLE

Au sens classique, la dérivée d'une série formelle $f \in K[[x]]$, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m + \dots$, est la série formelle $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + ma_mx^{m-1} + \dots$. Autrement dit, $f'(x)$ est le terme constant en t de la série formelle $(f(x+t) - f(x))/t \in K[[x, t]]$. On peut étendre, légèrement, cette définition comme suit. Etant donnée une autre série formelle $\xi \in K[[x]]$, on appelle dérivée de f suivant ξ le terme constant en t de la série formelle $(f(x+t\xi) - f(x))/t$: c'est la série formelle $a_1\xi + 2\xi x + \dots m\xi x^{m-1} + \dots$. On désigne cette dérivée par $\xi.f$. En particulier, la dérivée classique n'est autre que $1.f = f'$, la dérivée de f suivant la série constante 1. Ces considérations se généralisent au cas de séries formelles $f \in F[[X]]$ et $\xi \in X[[X]]$.

Pour simplifier, on écrira $S(X)$ au lieu de $X[[X]]$, et $S_m(X)$ au lieu de $X[[X]]_m$.

3.1. Dérivée suivant un polynôme homogène.

Soit $\xi \in S_r(X)$ un polynôme homogène de degré r à variables **et** coefficients dans X .

On va lui associer une **dérivation** qui, à chaque série formelle $f \in F[[X]]$, fait correspondre une série formelle $\xi.f \in F[[X]]$, la **dérivée de f suivant ξ** .

Pour cela, on procède par étapes.

3.1.1. On commence par le cas où f est un polynôme homogène. On suppose donc que $f \in F[X]_m$ est déterminé par $u \in L_m(X; F)$. Pour chaque $x \in E$, on considère

$$g(x) = \tilde{u}(\xi(x), x; (1, m-1))$$

voir ci-dessus, cas particulier, **2.2**.

Cela définit une application $g : X \rightarrow F$. On commence par observer que g ne dépend pas du choix de u , d'après le **théorème 2.3**.

On désignera l'application g ainsi construite par $\xi.f$ et on l'appellera **dérivée de f suivant ξ** .

Autrement dit,

$$(\xi.f)(x) = u(\xi(x), x, \dots, x) + u(x, \xi(x), x, \dots, x) + \dots + u(x, x, \dots, x, \xi(x)).$$

3.1.2. Proposition. $< 3 >$.

Soient $\xi \in S_r(X)$ et $f \in F[X]_m$. Alors

$$\xi.f \in F[X]_s \quad \text{où} \quad s = r + m - 1,$$

avec la convention, naturellement, que $F[X]_s = \{0\}$ pour $s < 0$.

En effet, soient $u \in L_m(X; F)$ et $v \in L_r(X; X)$ tels que

$$f(x) = u(x, \dots, x) \text{ et } \xi(x) = v(x, \dots, x).$$

Pour chaque $i = 1, 2, \dots, m$, on définit une application $w_i : X^s \rightarrow F$ comme suit

$$w_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m, y_1, \dots, y_r) = u(x_1, \dots, x_{i-1}, v(y_1, \dots, y_r), x_{i+1}, \dots, x_m).$$

On considère ensuite $w = w_1 + w_2 + \dots + w_m$. Alors

$$(\xi.f)(x) = w(x, \dots, x) \text{ et } w \in L_s(X; F). \quad \square$$

3.1.3. Le cas où f est une série formelle. Lorsque $f \in F[[X]]$, on définit $\xi.f$ à l'aide des dérivées des composantes homogènes de f . Ainsi, pour

$$f = \sum_m f_m \text{ où } f_m \in F[X]_m,$$

on pose

$$\xi.f = \sum_m \xi.f_m.$$

3.2. Dérivée suivant une série formelle.

Soient

$$\xi \in S(X) \text{ et } f \in F[[X]],$$

$$\text{où } \xi = \sum \xi_r \text{ et } f = \sum f_m,$$

les ξ_r et les f_m étant les composantes homogènes.

Généralisant la définition ci-dessus, on désignera par $\xi.f$ la série formelle $\sum g_s$ où, pour $s \geq 0$, on a posé

$$g_s = \sum_{r+m-1=s} \xi_r.f_m.$$

L'application de $S(X) \times F[[X]]$ dans $F[[X]]$ qui au couple (ξ, f) fait correspondre la dérivée $\xi.f$ est une application **bilinéaire**.

3.3. Remarque. Lorsque le corps K est de **caractéristique nulle**, toutes les factorielles $m!$ y sont inversibles et chaque polynôme homogène $f_m \in T[X]_m$ est alors déterminé par une application m -linéaires **symétrique** $u_m = u_m^* \in L_m(X; F)$ (voir la **Remarque 2.8**). Toute série formelle $f \in F[[X]]$ a un développement canonique

$$f(x) = \sum_m u_m(x, x, \dots, x),$$

où les u_m sont symétriques. Pour la dérivée de f suivant ξ , on a alors la formule particulièrement simple et suggestive suivante :

$$(\xi.f)(x) = \sum_m m u_m(\xi(x), x, \dots, x).$$

3.4. Plongement et dérivation.

On reprend les notations du **1.5** pour les séries doubles :

$$T = F[[X]] , \quad T_m = F[[X]]_m , \quad Z = X \times Y.$$

On a identifié $T[[Y]]$ à $F[[Z]]$. De même, $S(X)[[Y]]$ est identifié à $X[[Z]]$ lequel est plongé dans $S(Z)$.

Soient

$$f \in T_m[Y]_n \subset F[[Z]] , \quad \xi \in S_p(X)[Y]_q \subset S[[Z]].$$

Pour $y \in Y$, on a

$$f(y) \in T_m = F[X]_m , \quad \xi(y) \in S_p(X) \subset S(X).$$

Soit

$$g(y) = \xi(y).f(y)$$

la dérivée du polynôme $f(y)$ suivant $\xi(y)$; de sorte que l'on a $g(y) \in F[X]_{m+p-1}$. Soit alors $h = \xi.f$ la dérivée de $f \in F[[Z]]$ suivant $\xi \in S(Z)$; de sorte que l'on a $h \in F[[Z]]$.

3.5. On montre alors que l'on a $h(x, y) = g(y)(x)$.

Autrement dit, **calculer la dérivée $\xi.f$ “point par point” pour chaque y , revient à calculer cette dérivée “globalement” pour la variable dans Z .**

Démonstration. Si $u \in L_n(Y; L_m(X; F))$ détermine f , on considère $v \in L_r(Z; F)$, avec $r = m + n$, définie par

$$v(z_1, \dots, z_r) = u(y_{m+1}, \dots, y_r)(x_1, \dots, x_m) , \quad \text{où } z_i = (x_i, y_i),$$

de sorte que v détermine f comme élément de $F[[Z]]$ car

$$f(z) = f(y)(x) = u(y, \dots, y)(x, \dots, x) = v(z, \dots, z), \text{ où } z = (x, y).$$

On calcule

$$g(y)(x) = (\xi(y).f(y))(x) = \sum_i u(y, \dots, y)(x, \dots, \xi(x)^{\neg i}, \dots, x).$$

Ensuite ξ comme élément de $S(z)$:

$$\xi(z) = \xi(x, y) = (\xi(y)(x), 0).$$

Enfin,

$$\begin{aligned} h(z) = h(x, y) &= (\xi.f)(z) = \sum v(z, \dots, \xi(z), \dots, z) = \\ &= \sum_i u(y, \dots, y)(x, \dots, \xi(x)^{\neg i}, \dots, x) = g(y)(x). \quad \square \end{aligned}$$

3.6. Deux définitions.

On se donne une partie $N \subset X$ de l'espace vectoriel X ainsi que deux séries formelles $\xi \in S(X)$ et $f \in F[[X]]$.

On dira que ξ **prend ses valeurs** dans N lorsque, pour chacune de ses composantes homogènes ξ_m et pour chaque $x \in X$, on a

$$\xi_m(x) \in N.$$

On dira que f **ne dépend pas de N** lorsque chacune de ses composantes homogènes f_n peut être déterminée par une application n -linéaire $u \in L_n(X; F)$ ayant la propriété suivante :

$$u(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ dès que l'un des } x_i \text{ appartient à } N.$$

En particulier, on observera donc que, lorsque f ne dépend pas de N , on a

$$f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in N.$$

3.7. Lemme. *Si ξ prend ses valeurs dans N et f ne dépend pas de N , la dérivée $\xi.f$ est nulle.*

En effet, il suffit de faire la démonstration pour les composantes homogènes ξ_m et f_n . Or,

$$(\xi_m.f_n)(x) = \sum u(x, \dots, \xi_m(x)^{\neg i}, \dots, x),$$

et chacun des termes de cette somme est nul. \square

3.8. Dérivation d'une série composée. D'un seul mot, on signalera encore cette simple formule dont on se servira plus loin. Lorsque f est linéaire, autrement dit, lorsque f est un polynôme homogène de degré 1, on a

$$\xi.(f(g)) = f(\xi.g).$$

4. L'ALGÈBRE DE LIE $S(X)$

L'ensemble de séries formelles $S(X)$ muni de l'opération de dérivation $(\xi, \eta) \mapsto \xi.\eta$ est une algèbre, mais elle n'est **pas associative** (sauf cas trivial). Pourtant, fait inattendu, son crochet $[\xi, \eta] = \xi.\eta - \eta.\xi$ vérifie l'identité de Jacobi et en fait une algèbre de Lie.

Etant données des séries formelle ξ et η , éléments de $S(X)$, on peut considérer $\xi.\eta$, la dérivée de η suivant ξ , puis $\eta.\xi$, la dérivée de ξ suivant η . Ce sont deux séries formelles éléments de $S(X)$.

On pose alors

$$[\xi, \eta] = \xi.\eta - \eta.\xi.$$

On appelle cette opération le **crochet** sur $S(X)$.

On obtient alors le résultat (inattendu !) suivant.

4.1. Théorème. *< 4 >. L'espace vectoriel $S(X)$ muni du crochet est une algèbre de Lie.*

On procédera par étapes pour établir ce théorème.

4.2. Lemme. Soient

$$\xi \in S(X), \eta \in S(X), f \in F[[X]].$$

Alors

$$\xi.(\eta.f) - \eta.(\xi.f) = (\xi.\eta - \eta.\xi).f.$$

Autrement dit,

$$[\xi, \eta].f = \xi.(\eta.f) - \eta.(\xi.f).$$

En effet, par bilinéarité, on se ramène au cas des polynômes homogènes.

Soient alors

$$\xi \in S_r(X), \eta \in S_s(X), f \in F[X]_m.$$

On suppose que f, ξ, η , sont déterminés respectivement par u, v, w .

Calculons, avec des notations qui s'expliquent d'elles-mêmes :

$$(\xi.f)(x) = \sum_i u(x, \dots, \xi(x)^{\neg i}, \dots, x)$$

$$\eta.(\xi.f)(x) = \sum_{i \neq j} u(x, \dots, \xi(x)^{\neg i}, \dots, \eta(x)^{\neg j}, \dots, x) +$$

$$+ \sum_{i,j} u(x, \dots, v(x, \dots, \eta(x)^{\neg j}, \dots, x)^{\neg i}, \dots, x).$$

De même,

$$\begin{aligned} \xi.(\eta.f)(x) &= \sum_{i \neq j} u(x, \dots, \xi(x)^{\neg i}, \dots, \eta(x)^{\neg j}, \dots, x) \\ &+ \sum_{i,j} u(x, \dots, w(x, \dots, \xi(x)^{\neg j}, \dots, x)^{\neg i}, \dots, x). \end{aligned}$$

De sorte que

$$(\xi.(\eta.f) - \eta.(\xi.f))(x) = \sum_i u(x, \dots, ((\xi.\eta)(x) - (\eta.\xi)(x))^{\neg i}, \dots, x) = ((\xi.\eta - \eta.\xi).f)(x). \quad \square$$

4.3. Remarque. Soient ξ, η, ζ , des séries formelles, éléments de $S(X)$. Les deux séries formelle $\xi.(\eta.\zeta)$ et $(\xi.\eta).\zeta$ ne sont pas nécessairement égales.

Donnons un contre-exemple très simple! Pour

$$X = K, \quad \xi(x) = \zeta(x) = x^2, \quad \eta(x) = x,$$

on a

$$\begin{aligned} (\xi.\eta)(x) &= x^2 = \xi(x), \\ (\xi.\eta).\zeta &= \xi.\xi, \quad (\xi.\xi)(x) = 2x^3, \\ (\eta.\zeta)(x) &= 2x^2, \\ \xi.(\eta.\zeta)(x) &= 4x^3. \end{aligned}$$

Autrement dit, l'opération de dérivation n'est pas associative.

4.4. Lemme [identité de Jacobi]. Le crochet de $S(X)$ vérifie l'identité de Jacobi :

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] - [[a, c], b].$$

En effet, en utilisant le lemme précédent **4.2**, on a

$$\begin{aligned} & [[a, b], c] - [[a, c], b] = \\ & (ab - ba)c - c(ab - ba) - (ac - ca)b + b(ac - ca) = \\ & a(bc) - b(ac) - c(ab) + c(ba) - a(cb) + c(ab) + b(ac) - b(ca) = \\ & a(bc) + c(ba) - a(cb) - b(ca) = \\ & a(bc - cb) + c(ba) - b(ca) = \\ & a[b, c] - (bc - cb)a = a[b, c] - [b, c]a = [a, [b, c]]. \quad \square \end{aligned}$$

Cela démontre le **théorème 4.1**.

5. ACTION D'UNE ALGÈBRE DE LIE SUR UN ESPACE VECTORIEL

À chaque espace vectoriel X est attaché, naturellement, une algèbre de Lie $S(X)$, comme on vient de le voir. Il est tout aussi naturel de faire agir une algèbre de Lie donnée A sur l'espace vectoriel X par le biais des homomorphismes $D : A \rightarrow S(X)$ d'algèbres de Lie.

On appellera **action formelle** (à droite) de l'algèbre de Lie A sur l'espace vectoriel X tout homomorphisme d'algèbres de Lie $D : A \rightarrow S(X)$.

Ainsi, pour chaque $a \in A$, l'élément correspondant $D_a \in S(X)$ est une série formelle à variables et coefficients dans X . Pour chaque $\lambda \in K$, $a \in A$, $b \in A$, on aura donc

$$D_{\lambda a} = \lambda D_a, \quad D_{a+b} = D_a + D_b, \quad D_{[a,b]} = [D_a, D_b].$$

De plus, pour toute série formelle $f \in F[[X]]$, la dérivée $D_a f$ (alias $D_a \cdot f$) de f suivant D_a est, elle-même, une série formelle, élément de $F[[X]]$ également. On a, aussi, la formule suivante qui découle du **lemme 4.2** :

$$D_{[a,b]} f = [D_a, D_b] f = (D_a D_b - D_b D_a) f = D_a(D_b f) - D_b(D_a f).$$

PROLONGEMENT CANONIQUE D'UNE ACTION FORMELLE

Soit $D : A \rightarrow S(X)$ une action formelle de l'algèbre de Lie A sur l'espace vectoriel X . Pour chaque espace vectoriel Y , on définira une structure d'algèbre de Lie naturelle sur $A[[Y]]$ puis un prolongement canonique de l'action D en une action de l'algèbre de Lie $A[[Y]]$ sur l'espace vectoriel produit $X \times Y$.

5.1. Crochet sur $A[[Y]]$.

Ce sera simplement le “crochet ponctuel”, ou encore “point par point”, **hérité** de A .

Autrement dit, si f et g appartiennent à $A[[Y]]$ et $y \in Y$, on dira, de manière imagée, que

$$[f, g](y) = [f(y), g(y)].$$

Plus précisément, et techniquement : si $f \in A[Y]_n$ et $g \in A[Y]_r$, pour chaque $y \in Y$, on pose

$$[f, g](y) = [f(y), g(y)].$$

Cela définit une application $[f, g] : Y \rightarrow A$.

5.2. Lemme. $< 6 >$. Soient

$$f \in A[Y]_n \text{ et } g \in A[Y]_r;$$

Alors

$$[f, g] \in A[Y]_{n+r}.$$

Plus précisément, si f et g sont déterminés respectivement par u et v , on considère l'application

$$w : Y^{n+r} \rightarrow A$$

définie par

$$w(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) = [u(x_1, \dots, x_n), v(y_1, \dots, y_r)] \text{ pour le crochet de } A.$$

Alors $w \in L_{n+r}(Y; A)$. On écrira simplement $w = [u, v]$. Enfin, $[f, g]$ est déterminé par $[u, v]$ \square

5.3. L'algèbre de Lie $A[[Y]]$.

A présent, lorsque f et g sont des séries formelles éléments de $A[[Y]]$, où

$$f = \sum f_n, \quad g = \sum g_r,$$

on pose

$$[f, g]_s = \sum_{n+r=s} [f_n, g_r]$$

et on définit $[f, g]$ comme étant la série formelle $\sum [f, g]_s$.

Ce crochet sur $A[[Y]]$, **hérité** du crochet sur A , est une application bilinéaire antisymétrique définie sur $A[[Y]]$.

5.4. Proposition. $< 7 >$. *Le crochet hérité de A munit l'espace vectoriel $A[[Y]]$ d'une structure d'algèbre de Lie.*

En effet, “point par point”, le crochet vérifie l'identité de Jacobi. \square

Comme annoncé ci-dessus, on a donc muni l'espace $A[[Y]]$ d'une structure d'algèbre de Lie héritée de celle de A .

5.5. Prolongement canonique d'une action formelle.

Soit $D : A \rightarrow S(X)$ une action formelle de l'algèbre de Lie A sur l'espace vectoriel X . Soit Y un espace vectoriel quelconque. Considérons l'espace vectoriel produit $Z = X \times Y$ et l'algèbre de Lie $A[[Y]]$.

Soit $a \in A[[Y]]$. On peut **substituer** la série formelle a dans l'application linéaire D (voir ci-dessus au **1.7**). Désignons le résultat de cette substitution par D_a . Ainsi D_a est une série formelle à variables dans Y et coefficients dans $S(X)$. Autrement dit,

$$D_a \in S(X)[[Y]] = (X[[X]])[[Y]].$$

Ce dernier espace de séries formelles est canoniquement plongé dans $X[[X \times Y]]$, lui-même plongé dans $Z[[Z]] = S(Z)$.

Finalement, à chaque $a \in A[[Y]]$ correspond une série formelle $D_a \in S(Z)$. Nous désignerons cette application par la même lettre

$$D : A[[Y]] \rightarrow S(Z).$$

C'est visiblement une application linéaire et qui prolonge $D : A \rightarrow S(X)$.

5.6. Proposition.

Soit $D : A \rightarrow S(X)$ une action formelle de l'algèbre de Lie A sur l'espace vectoriel X . Pour chaque espace vectoriel Y , le prolongement $D : A[[Y]] \rightarrow S(X \times Y)$ est une action formelle de l'algèbre de Lie $A[[Y]]$ sur l'espace vectoriel produit $Z = X \times Y$.

En effet, il suffit de prouver que

$$D_{[a,b]} = [D_a, D_b]$$

pour tout couple de séries formelles a et b éléments de $A[[Y]]$. Il suffit donc d'établir cette égalité lorsque a et b sont des polynômes homogènes.

Soient

$$a \in A[Y]_n \text{ et } b \in A[Y]_r.$$

Alors

$$[a, b] \in A[Y]_{n+r} \text{ et } [a, b](y) = [a(y), b(y)] \text{ pour chaque } y \in Y.$$

Comme $D : A \rightarrow S(X)$ est une action formelle, on a

$$D_{[a,b](y)} = D_{[a(y), b(y)]} = [D_{a(y)}, D_{b(y)}] \text{ pour chaque } y \in Y.$$

D'un autre côté, considérons $[D_a, D_b] = D_a \cdot D_b - D_b \cdot D_a$. C'est un élément de $S(Z)$ que l'on peut calculer "ponctuellement" comme on l'a vu plus haut (au **3.5**). Ce n'est autre que la série formelle dans $S(Z)$ qui correspond au polynôme homogène $h \in S(X)[Y]$ où

$$h(y) = D_{a(y)} \cdot D_{b(y)} - D_{b(y)} \cdot D_{a(y)} = [D_{a(y)}, D_{b(y)}],$$

d'où l'égalité. \square

5.7. Sur le plongement de $S(X)[[Y]]$ dans $S(Z)$.

On reprend les notations du **1.5** pour les séries doubles; dans le cas où $F = X$. Ainsi :

$$T = S(X) , \quad Z = X \times Y.$$

On a vu que $T[[Y]]$ s'identifie canoniquement à $X[[X \times Y]] = X[[Z]]$ lequel se plonge dans $Z[[Z]] = S(Z)$. D'où un plongement canonique

$$j : T[[Y]] \rightarrow S(Z).$$

On a muni $T = S(X)$ d'une structure d'algèbre de Lie (voir au **3**, ci-dessus) dont $T[[Y]]$ hérite "ponctuellement" (voir au **5.4**, ci-dessus). D'autre part $S(Z)$ est également muni, intrinséquement, d'une structure d'algèbre de Lie.

On établit le résultat *naturel* suivant :

5.7.1. Théorème. *Le plongement $j : T[[Y]] \rightarrow S(Z)$ est un plongement d'algèbres de Lie. < 11 >.*

Autrement dit, pour toutes séries formelles f et g dans $T[[Y]]$, on a

$$j([f, g]) = [j(f), j(g)].$$

En effet, on procède en deux étapes. On commence par supposer que

$$f \in T_m[X]_n , \quad g \in T_p[X]_q.$$

Soit $h = [f, g]$, crochet dans $T[[Y]]$. Ainsi, pour chaque $y \in Y$, on a

$$h(y) = [f(y), g(y)] = f(y).g(y) - g(y).f(y).$$

Ici, $f(y).g(y)$ est la dérivée (sur la variable dans X) de $g(y)$ suivant $f(y)$. D'après le résultat antérieur du **3.5** ci-dessus, on a

$$(f(y).g(y))(x) = (j(f).(j(g)))(x, y),$$

où $j(f).j(g)$ est la dérivée de $j(g)$ suivant $j(f)$ pour la variable dans Z . Donc

$$h(y)(x) = [j(f), j(g)](x, y),$$

avec le crochet $[f, g]$ de $S(Z)$, et

$$j(h) = [j(f), j(g)].$$

Dans le cas général, on applique ce qui précède aux composantes homogènes de f et de g et on se sert de la double additivité du crochet. \square

5.7.2 Plongement de l'algèbre de Lie $S(X)$ dans l'algèbre de Lie $S(Z)$. < 10 >.

Au passage, on peut observer que l'on obtient ainsi, en particulier, un plongement *naturel* de l'algèbre de Lie $S(X)$ dans l'algèbre de Lie $S(Z)$, sans nouvelle argumentation. **En effet**, l'ensemble $T[Y]_0$ des *constantes* de $T[[Y]]$ est une sous-algèbre de Lie de $T[[Y]]$ isomorphe à $S(X)$. \square

De même, bien entendu, $S(Y)$ est également plongée dans $S(Z)$.

6. L'EXEMPLE ORIGINEL

Nous avons introduit les notions *formelles* précédentes en nous inspirant de l'exemple de la notion de *loi d'opération infinitésimale* selon Bourbaki. Cet exemple originel des lois d'opérations infinitésimales, ce prototype **analytique**, nous a servi de modèle pour l'introduction des notions purement **algébriques** de dérivation et d'action formelles pour les algèbres de Lie.

On suppose, ici, que $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et on se donne des espaces de Banach X et F .

Dans ce cas, on désigne par $\hat{P}(X; F)$ l'ensemble des **séries formelles à composantes continues** sur X à valeurs dans F (voir Bourbaki [1], p.88-89). Ainsi $\hat{P}(X; F)$ est un sous-espace vectoriel de $F[[X]]$, qui lui est égal lorsque la dimension de X est **finie**.

6.1. Dérivation suivant un champ de vecteurs.

Soient U un voisinage ouvert de 0 dans X et $f : U \rightarrow F$ une application analytique de U dans F , tous deux, considérés comme des variétés analytiques. Soit ξ un champ analytique de vecteurs sur U . On sait définir l'application analytique $\xi(f) : U \rightarrow F$ (voir Bourbaki [2], 8.2.2 et 8.2.3, p.10) : c'est la fonction $x \mapsto \langle \xi, d_x f \rangle (x)$ où $d_x f$ désigne la différentielle de f au point x .

En particulier, l'injection canonique $h : U \rightarrow X$ est analytique, de même que l'application $\xi(h) : U \rightarrow X$.

Identifions chacune des applications $\xi(h)$, f et $\xi(f)$ aux séries formelles qui les représentent au voisinage de 0,

$$\xi(h) \in \hat{P}(X; X), \quad f \in \hat{P}(X; F), \quad \xi(f) \in \hat{P}(X; F).$$

On vérifie que l'on a

$$\xi(f) = \xi(h).f.$$

Autrement dit, la série formelle $\xi(f)$ n'est autre que la dérivée de la série formelle f suivant la série formelle $\xi(h)$, telle que cette dérivée a été définie ci-dessus (au **3**).

Vérification. Il suffit de la faire dans le cas où f est un polynôme homogène continu de degré m sur X à valeurs dans F , autrement dit, lorsqu'il existe une application multilinéaire continue $X^m \rightarrow F$ telle que $f(x) = u(x, \dots, x)$, autrement dit, $f = u(h, \dots, h)$. Dans ce cas, pour calculer $\xi(f)$, on se sert de la formule de dérivation des fonctions multilinéaires composées (voir Bourbaki [2], 8.2.3, page 11) :

$$\xi(f) = \sum_i u(x, \dots, \xi(h)^{\top i}, \dots, x) = \xi(h).f. \quad \square$$

6.2. Lois d'opérations infinitésimales.

On reprend le voisinage ouvert U de 0 dans X et on se donne une algèbre de Lie normable complète A . Une **loi d'opération infinitésimale à droite**, analytique, de l'algèbre de Lie A dans la variété analytique U est une application $a \mapsto \xi_a$, où ξ_a est un champ de vecteurs sur U , ayant les deux propriétés suivantes (voir Bourbaki [4], p.139).

(i) L'application $(a, x) \mapsto \xi_a(x)$ est un morphisme analytique du fibré vectoriel trivial $A \times U$ dans le fibré tangent $T(U)$ lequel s'identifie au fibré trivial $U \times X$.

(ii) On a $[\xi_a, \xi_b] = \xi_{[a, b]}$ quels que soient a et b dans A .

En particulier, pour chaque $a \in A$, le champ de vecteurs ξ_a est analytique. Bien entendu, l'injection canonique $h : U \rightarrow X$ est analytique. On considère l'application $\xi_a(h) : U \rightarrow X$ (voir Bourbaki [2], 8.2.2 et 8.2.3, p.10) : c'est la fonction $x \mapsto d_x h(\xi_a(x))$ où $d_x h$ désigne la différentielle de h au point x .

Cette application $\xi_a(h)$ est analytique donc représentable au voisinage de l'origine par une série formelle (convergente) à composantes continues, c'est-à-dire par un élément de $\hat{P}(X; X) \subset S(X)$, que nous désignerons par D_a .

D'après ce qui a été dit, ci-dessus (au 6.1), la dérivation suivant cette série formelle D_a opère comme suit :

Etant donnée une application $f : U \rightarrow F$, analytique au voisinage de 0, on a

$$\xi_a(f) = D_a.f.$$

On peut alors vérifier, simplement, que l'**application** $D : A \rightarrow S(X)$ **ainsi définie est**, au sens que nous lui avons donné, **une action formelle de l'algèbre de Lie A sur l'espace vectoriel X** .

On dira que c'est l'action formelle **déduite** de la loi d'opération infinitésimale ξ donnée.

6.3. Théorème. *< 5 >. L'application $D : A \rightarrow S(X)$ déduite d'une loi d'opération infinitésimale ξ donnée est une action formelle de A sur X .*

En effet, la seule chose qui pourrait ne pas être tout à fait *claire*, c'est que le crochet $[D_a, D_b]$ **calculé dans l'algèbre de Lie $S(X)$** est égal à $D_{[a,b]}$.

On a

$$D_{[a,b]} = \xi_{[a,b]}(h) = [\xi_a, \xi_b](h) = \xi_a(\xi_b(h)) - \xi_b(\xi_a(h)) = \xi_a(D_b) - \xi_b(D_a).$$

Or, $\xi_a(D_b) = D_a \cdot D_b$, la dérivée de la série formelle D_b suivant la série formelle D_a . De sorte que

$$D_{[a,b]} = D_a \cdot D_b - D_b \cdot D_a = [D_a, D_b]. \quad \square$$

7. PRODUITS D'ENTRELACEMENTS

On se donne une action formelle $d : B \rightarrow S(Y)$ de l'algèbre de Lie B sur Y . On introduit l'espace vectoriel produit $W = A[[Y]] \times B$ et on définit une structure d'algèbre de Lie sur W que l'on appellera **produit d'entrelacement de B par A relativement à l'action formelle d** . On désignera cette algèbre de Lie par $W(A, B; d)$. Elle se présentera comme un **produit semi-direct** d'algèbres de Lie. A chaque action formelle $d : B \rightarrow S(Y)$, un produit d'entrelacement $W(A, B; d)$: c'est la raison du pluriel.

7.1. L'algèbre de Lie $\text{Der}(A : Y)$.

On va désigner par $\text{Der}(A : Y)$ l'algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre de Lie $A[[Y]]$. Autrement dit, $\text{Der}(A : Y) = \mathfrak{d}(A[[Y]])$.

Pour tout élément $f \in S(Y)$ et tout $a \in A[[Y]]$, on peut considérer la dérivée $f.a$ de la série a suivant la série f . L'application ainsi définie de $A[[Y]]$ dans elle-même, $a \mapsto f.a$, est linéaire. Désignons-la par D_f (sans grand risque de confusion).

7.1.1. C'est une dérivation de l'algèbre de Lie $A[[Y]]$. < 8 >.

En effet, il faut montrer que l'on a

$$f.[a, b] = [f.a, b] + [a, f.b]$$

pour tous a et b dans $A[[Y]]$. Il suffit de le faire lorsque a , b et f sont des polynômes homogènes.

Soient donc

$$a \in A[Y]_m, \quad b \in A[Y]_n, \quad f \in S_r(Y),$$

$$u \in L_m(Y; A), \quad v \in L_n(Y; A).$$

Supposons que a est déterminé par u , et b par v . Alors $[a, b]$ est déterminé par $w = [u, v]$ (voir au **5.2**). Posons $c = f.[a, b]$. On a $[a, b] \in A[Y]_{m+n}$ et $c \in A[Y]_{m+n+r-1}$. De plus,

$$c(y) = \sum_i [y, \dots, f(y)^{\neg i}, \dots, y], b(y)] + \sum_i [a(y), v(y, \dots, f(y)^{\neg i}, \dots, y)] =$$

$$[f.a, b](y) + [a, f.b](y). \quad \square$$

L'application $f \mapsto D_f$ de $S(Y)$ dans $\text{Der}(A : Y)$ est linéaire.

7.1.2. C'est un homomorphisme d'algèbres de Lie. < 9 >.

En effet, il faut montrer que l'on a

$$D_{[f,g]} = [D_f, D_g],$$

autrement dit, que l'on a

$$[f, g].a = f.(g.a) - g.(f.a)$$

pour tous

$$a \in A[[Y]] , \quad f \in S(Y) , \quad g \in S(Y).$$

Or, cela découle du lemme **4.2**. \square

7.2. Homomorphisme de B dans $\text{Der}(A : Y)$.

Reprenons l'action formelle $d : B \rightarrow S(Y)$. Pour chaque $b \in B$, on a $d_b \in S(Y)$. Nous venons de voir comment d_b définit une dérivation de l'algèbre de Lie $A[[Y]]$. Désignons cette dérivation par $\sigma(b)$.

L'application composée $\sigma : B \rightarrow \text{Der}(A : Y)$ est donc un homomorphisme d'algèbres de Lie, composé de l'action formelle $d : B \rightarrow S(Y)$ suivie de l'homomorphisme $S(Y) \rightarrow \text{Der}(A : Y)$ du **7.1.2**.

7.3. Crochet sur $W = A[[Y]] \times B$.

Etant donnés deux éléments (f, b) et (g, c) de W , on pose

$$[(f, b), (g, c)] = ([f, g] + d_b.g - d_c.f, [b, c]).$$

Cela définit sur W une structure d'algèbre de Lie qui n'est autre que le **produit semi-direct** de l'algèbre de Lie B par l'algèbre de Lie $A[[Y]]$ relativement à l'homomorphisme $\sigma : B \rightarrow \text{Der}(A : Y)$ introduit ci-dessus.

8. ACTION TRIANGULAIRE

On se donne

D : une action de A sur X ,

d : une action de B sur Y ,

$Z = X \times Y$: l'espace vectoriel produit,

$W = W(A, B; d)$: le produit d'entrelacement.

On fait agir W sur Z canoniquement, *en cascade*. C'est cette action Δ que l'on baptisera **action triangulaire**. C'est, en quelque sorte, un produit d'entrelacement $\Delta = \Delta(D, d)$ de l'action $d : B \rightarrow S(Y)$ par l'action $D : A \rightarrow S(X)$.

Comme on l'a vu ci-dessus (au **5.6**), l'action $D : A \rightarrow S(X)$ se prolonge en une action $D : A[[Y]] \rightarrow S(Z)$.

D'autre part l'algèbre de Lie $S(Y)$ est plongée canoniquement dans l'algèbre de Lie $S(Z)$ (voir ci-dessus au **5.7.2**) donc $d : B \rightarrow S(Y) \rightarrow S(Z)$ est une action de B sur Z .

Pour chaque couple $(f, b) \in A[[Y]] \times B$, on posera

$$\Delta_{(f,b)} = D_f + d_b, \text{ c'est un élément de } S(Z).$$

On obtient ainsi une application $\Delta : W \rightarrow S(Z)$ qui est linéaire.

On a alors le résultat très important suivant.

8.1. Théorème. $< 12 >$.

L'application $\Delta : W \rightarrow S(Z)$ est une action formelle du produit d'entrelacement $W(A, B; d)$ sur l'espace produit $Z = X \times Y$.

Démonstration. Le seul point délicat consiste à vérifier que l'on bien

$$[\Delta_{(f,b)}, \Delta_{(g,c)}] = \Delta_{[(f,b), (g,c)]}.$$

Le premier membre s'écrit

$$[D_f + d_b, D_g + d_c] = [D_f, D_g] + [D_f, d_c] + [d_b, D_g] + [d_b, d_c].$$

D'autre part, on a

$$[(f, b), (g, c)] = ([f, g] + d_b g - d_c f, [b, c]).$$

De sorte que le second membre s'écrit

$$\Delta_{[(f,b), (g,c)]} = D_{[f,g]} + D_{d_b g} - D_{d_c f} + d_{[b,c]}.$$

Il suffira donc de vérifier, successivement, que l'on a

$$(1) \quad D_{[f,g]} = [D_f, D_g].$$

$$(2) \quad d_{[b,c]} = [d_b, d_c].$$

$$(3) \quad D_{d_b f} - D_{d_c g} = [d_b, D_g] - [d_c, D_f].$$

Or, le (1) découle du **5.6** ci-dessus. Le (2) découle du fait que d est une action formelle. Quant au (3), on montrera d'abord ceci : pour **tout** couple $(a, b) \in W$, on a

$$(4) \quad D_a \cdot d_b = 0,$$

$$(5) \quad d_b \cdot D_a = D_c \quad \text{où} \quad c = d_b \cdot a = \sigma(b) \cdot a.$$

En effet : (4) La série formelle d_b ne dépend pas de X et la série formelle D_a prend ses valeurs dans X . Donc $D_a \cdot d_b = 0$, (voir au **3.7** ci-dessus).

(5) On se sert de la remarque ci-dessus (au **3.5**). Calculer la dérivée $d_b \cdot D_a$ dans $S(Z)$ où

$$d_b \in S(Y) \quad \text{et} \quad D_a \in S(X)[[Y]],$$

revient à la calculer comme dérivée sur Y . Or, c'est la dérivée de la série *composée* de a suivi de l'application **linéaire** D , de sorte que (voir ci-dessus au **3.8**) $d_b \cdot D_a = D_{d_b \cdot a} = D_c$, comme annoncé . \square

On a ainsi

$$(6) \quad [d_b, D_a] = d_b \cdot D_a - D_a \cdot d_b = D_b \cdot D_a = D_{d_b \cdot a}.$$

De (6) découle immédiatement (3), ce qui achève la démonstration. \square

8.2. L'action triangulaire. Reprenons la formule qui définit cette action du produit d'entrelacement $W = W(A, B; d)$ sur l'espace vectoriel produit $Z = X \times Y$:

$$\Delta_{(a,b)}(x, y) = D_{a(y)}(x) + d_b(y).$$

Cette action est **triangulaire** dans le sens où elle comporte trois temps : l'action d , en position b , commence par agir sur le point y de Y pour donner $d_b(y)$ puis l'élément a de $A[[Y]]$ agit sur le point y de Y pour fournir $a(y)$ ce qui enclenche l'action D en position $a(y)$ et fait agir $D_{a(y)}$ sur le point x de X pour donner $D_{a(y)}(x)$.

De manière imagée, on peut dire que c'est une action *en cascade*.

A partir d'ici on suppose que le corps K est de caractéristique nulle.

9. ACTION FONDAMENTALE D'UNE ALGÈBRE DE LIE SUR ELLE-MÊME

Pour le crochet $[\xi, \eta] = \xi \cdot \eta - \eta \cdot \xi$, on sait déjà que $S(B)$ est une algèbre de Lie (voir au **4** ci-dessus). On introduit, à présent, l'**action fondamentale** de B sur elle-même : c'est une action formelle particulière, un homomorphisme d'algèbre de Lie particulier $d : B \rightarrow S(B)$.

C'est à dessein que l'on choisit de définir cette action fondamentale pour l'algèbre B plutôt que A , afin de faciliter la transition entre ce paragraphe **9** et le paragraphe **10**, suivant.

On procédera par étapes, comme suit.

9.1. Une série génératrice.

On commence par considérer la "série génératrice" suivante :

$$G(T) = \frac{Te^T}{e^T - 1} = \sum_n t_n T^n.$$

Les coefficients t_n sont des nombres rationnels qui appartiennent donc au corps K qui est de caractéristique nulle !

Plus précisément, on a

$$t_0 = 1, \quad t_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et, pour } n \geq 1, \quad t_{2n} = \frac{b_{2n}}{(2n)!}, \quad t_{2n+1} = 0,$$

où les b_{2n} sont les nombres de BERNOULLI. Attention, cependant, on a $t_1 = -b_1$.

9.2. Convention. Comme d'habitude, on prolonge la suite des coefficients t_n par la convention suivante : $t_i = 0$ pour $i < 0$.

9.3. Définition de l'action fondamentale.

Pour chaque $b \in B$ et chaque n , on considère l'application $u_{b,n} : B^n \rightarrow B$ définie par

$$u_{b,n}(y_1, \dots, y_n) = t_n(\text{ad } y_1) \circ (\text{ad } y_2) \circ \dots \circ (\text{ad } y_n)(b).$$

Ici, comme d'habitude,

$$\text{ad } y : B \rightarrow B$$

désigne l'application linéaire **adjointe**

$$(\text{ad } y)(b) = [y, b].$$

On pose aussi

$$d_{b,n}(y) = t_n(\text{ad } y)^n(b),$$

de sorte que

$$d_{b,n}(y) = u_{b,n}(y, \dots, y).$$

Ainsi $d_{b,n}$ est un polynôme homogène de degré n , à variables et coefficients dans B , déterminé par $u_{b,n} \in L_n(B; B)$.

9.3.1. Autrement dit, on a $d_{b,n} \in S(B)_n$. < 13 >.

On désigne enfin par

$$d_b = \sum_n d_{b,n}$$

la série formelle correspondante, qui appartient à $S(B)$.

On définit ainsi une application **linéaire**, canonique,

$$d : B \rightarrow S(B), \quad b \mapsto d_b,$$

que l'on appellera **action fondamentale** de B .

Le théorème important suivant montre que cette action est une action formelle au sens donné ci-dessus, au **5**.

9.4. Théorème. < 14 >.

Pour toute algèbre de Lie B , son action fondamentale $d : B \rightarrow S(B)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Autrement dit, d est une action formelle de B sur elle-même.

Nous démontrons ce théorème plus bas (au **9.10**). Il nous faut d'abord établir un certain nombre de résultats auxiliaires afin de faciliter la démonstration finale.

On commence par vérifier l'identité remarquable suivante pour la fonction génératrice G .

9.5. Lemme. La série formelle G vérifie l'identité suivante :

$$G(x + y) = L(x, y) + L(y, x)$$

où

$$L(x, y) = \frac{G(x + y) - G(y)}{x} G(x).$$

En effet, on a

$$G(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}, \quad G(x+y) = \frac{(x+y)e^{x+y}}{e^{x+y} - 1}, \quad G(x)G(y) = \frac{xye^{x+y}}{(e^x - 1)(e^y - 1)}.$$

Ainsi

$$U := \frac{G(x)}{x} + \frac{G(y)}{y} = \frac{e^x}{e^x - 1} + \frac{e^y}{e^y - 1} = \frac{2e^{x+y} - e^x - e^y}{(e^x - 1)(e^y - 1)}$$

et

$$V := \frac{G(x)G(y)}{x} + \frac{G(x)G(y)}{y} = \frac{(x+y)e^{x+y}}{(e^x - 1)(e^y - 1)}.$$

De sorte que

$$\begin{aligned} L(x, y) + L(y, x) &= UG(x+y) - V = \frac{(x+y)e^{x+y}}{(e^x - 1)(e^y - 1)} \cdot \left(\frac{2e^{x+y} - e^x - e^y}{e^{x+y} - 1} - 1 \right) = \\ &= \frac{(x+y)e^{x+y}}{e^{x+y} - 1} \cdot \frac{e^{x+y} - e^x - e^y + 1}{(e^x - 1)(e^y - 1)} = G(x+y). \quad \square \end{aligned}$$

A présent, on va établir deux autres identités. Elles sont *combinatoires* et font intervenir les coefficients t_n . La première est très simple et doit nous servir plus loin.

9.6. Lemme. Pour tout entier naturel m , on a

$$\frac{1}{m!} = \sum_{n+r=m} \frac{t_r}{(n+1)!}.$$

En effet, on a

$$e^x = \frac{e^x - 1}{x} G(x),$$

donc

$$\sum_m \frac{x^m}{m!} = \left(\sum_n \frac{x^n}{(n+1)!} \right) \left(\sum_r t_r x^r \right) = \sum_m \left(\sum_{n+r=m} \frac{t_r}{(n+1)!} \right) x^m.$$

Le résultat s'obtient par identification. \square

La seconde identité combinatoire nécessite davantage de calculs.

9.7. Lemme. Pour tous entiers m, p, q , tels que $m = p + q$, on a

$$\binom{m}{p} t_m = \sum_{\substack{n+r=m+1 \\ p \leq n-1}} \binom{n}{p} t_n t_r + \sum_{\substack{n+r=m+1 \\ q \leq r-1}} \binom{r}{q} t_n t_r.$$

Démonstration. On utilise la méthode classique des séries génératrices.

On pose

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \sum_{p+q=m} \binom{m}{p} t_m x^p y^q, \\ I(x, y) &= \sum_{p+q=m} \left(\sum_{\substack{n+r=m+1 \\ p \leq n-1}} \binom{n}{p} t_n t_r \right) x^p y^q, \\ J(x, y) &= \sum_{p+q=m} \left(\sum_{\substack{n+r=m+1 \\ q \leq r-1}} \binom{r}{q} t_n t_r \right) x^p y^q. \end{aligned}$$

Il suffira donc de montrer que l'on a

$$H(x, y) = I(x, y) + J(x, y).$$

Calcul de H . On a

$$H(x, y) = \sum_m t_m (x + y)^m = G(x + y).$$

Calcul de I . On a

$$yI(x, y) = \sum_{p+q=m} \left(\sum_{\substack{n+r=m+1 \\ p \leq n-1}} \binom{n}{p} t_n t_r \right) x^p y^{q+1}.$$

Or, pour $n + r = m + 1$ et $p + q = m$, on a $q + 1 = m + 1 - p = n + r - p$. Ainsi,

$$\begin{aligned} yI(x, y) &= \sum_{\substack{n+r=m+1 \\ p \leq n-1}} \binom{n}{p} t_n t_r x^p y^{n-p} y^r = \sum_{n+r=m+1} t_n t_r ((x + y)^n - x^n) y^r = \\ &= \sum_r (G(x + y) - G(x)) t_r y^r = (G(x + y) - G(x)) G(y) = G(x + y) G(y) - G(x) G(y). \end{aligned}$$

Calcul de J . Par symétrie, on a

$$J(x, y) = I(y, x).$$

D'où

$$xJ(x, y) = G(x + y)G(x) - G(x)G(y).$$

Ainsi,

$$I(x, y) + J(x, y) = \frac{G(x + y)G(x) - G(x)G(y)}{x} + \frac{G(x + y)G(y) - G(x)G(y)}{y} = G(x + y)$$

d'après le lemme **9.5**. D'où l'identité annoncée

$$H(x, y) = I(x, y) + J(x, y). \quad \square$$

Voici, à présent, des résultats auxiliaires sur les dérivations des algèbres de Lie. Ils nous serviront à établir le théorème **9.4** ainsi que d'autres résultats encore, plus loin.

9.8. Lemme. Soit D une dérivation quelconque de l'algèbre de Lie B . Alors, pour tous éléments $a \in B$, $b \in B$, et tout entier $m \geq 0$, on a les identités suivantes :

$$(1) \quad \sum_{0 \leq k \leq m} D^k[a, D^{m-k}b] = \sum_{0 \leq i \leq m} \binom{m+1}{i+1} [D^i a, D^{m-i}b] = \sum_{\substack{i+j=m \\ i \geq 0}} \binom{m+1}{i+1} [D^i a, D^j b].$$

$$(2) \quad \sum_{0 \leq k \leq m} (D^k[a, D^{m-k}b] + D^k[D^{m-k}a, b]) = \sum_{0 \leq i \leq m} \binom{m+2}{i+1} [D^i a, D^{m-i}b].$$

Démonstration.

(1) On utilise la formule de Leibniz pour les dérivées d'ordre supérieur. Il vient

$$\sum_{0 \leq k \leq m} D^k[a, D^{m-k}b] = \sum_{0 \leq k \leq m} \sum_i \binom{k}{i} [D^i a, D^{m-i}b].$$

Or, pour $i \geq 0$ fixé, on a

$$\sum_{0 \leq k \leq m} \binom{k}{i} = \binom{0}{i} + \binom{1}{i} + \cdots + \binom{m}{i} = \binom{m+1}{i+1}.$$

D'où la première identité.

(2) D'après le (1), en échangeant les rôles de a et de b , on a

$$\sum_{0 \leq k \leq m} D^k[D^{m-k}a, b] = \sum_{\substack{i+j=m \\ j \geq 0}} \binom{m+1}{j+1} [D^i a, D^j b] = \sum_{0 \leq i \leq m} \binom{m+1}{i} [D^i a, D^{m-i}b].$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq m} (D^k[a, D^{m-k}b] + D^k[D^{m-k}a, b]) &= \sum_{0 \leq i \leq m} \left(\binom{m+1}{i+1} + \binom{m+1}{i} \right) [D^i a, D^{m-i}b] = \\ &= \sum_{0 \leq i \leq m} \binom{m+2}{i+1} [D^i a, D^{m-i}b]. \quad \square \end{aligned}$$

Combinant ce dernier lemme et l'identité combinatoire du **9.7**, on établit le résultat suivant.

9.9. Lemme. Soit D une dérivation quelconque de l'algèbre de Lie B . Alors, pour tous $a \in B$ et $b \in B$, et tout entier $m \geq 0$, on a

$$t_m D^m[a, b] = \sum_{n+r=m+1} t_n t_r \left(\sum_{0 \leq k \leq r-1} D^k[D^n a, D^{r-k-1} b] + \sum_{0 \leq k \leq n-1} D^k[D^{n-k-1} a, D^r b] \right).$$

Démonstration. La formule de Leibniz donne

$$D^m[a, b] = \sum_{p+q=m} \binom{m}{p} [D^p a, D^q b].$$

D'autre part, l'identité **9.8**(1) permet d'écrire

$$\sum_{0 \leq k \leq r-1} D^k[D^n a, D^{r-k-1} b] = \sum_{0 \leq i \leq r-1} \binom{r}{i+1} [D^{n+i} a, D^{r-i-1} b].$$

Le terme en $[D^p a, D^q b]$ dans la somme ci-dessus correspond à

$$n+i=p, \quad r-i-1=q, \quad q \leq r-1.$$

Son coefficient est donc $\binom{r}{q}$. De sorte que l'on a

$$\sum_{0 \leq k \leq r-1} D^k[D^n a, D^{r-k-1} b] = \sum_{\substack{p+q=r-1 \\ q \leq r-1}} \binom{r}{q} [D^p a, D^q b].$$

De même, on a

$$\sum_{0 \leq k \leq n-1} D^k[D^{n-k-1} a, D^r b] = \sum_{\substack{p+q=n-1 \\ p \leq n-1}} \binom{n}{p} [D^p a, D^q b].$$

Ainsi, dans la somme suivante

$$\sum_{n+r=m+1} t_n t_r \left(\sum_{0 \leq k \leq r-1} D^k[D^n a, D^{r-k-1} b] + \sum_{0 \leq k \leq n-1} D^k[D^{n-k-1} a, D^r b] \right),$$

le coefficient de $[D^p a, D^q b]$ est égal à

$$\sum_{\substack{n+r=m+1 \\ q \leq r-1}} \binom{r}{q} t_n t_r + \sum_{\substack{n+r=m+1 \\ p \leq n-1}} \binom{n}{p} t_n t_r$$

qui est égal à $\binom{m}{p} t_m$, d'après le **9.7** ci-dessus, ce qui achève la démonstration. \square

9.10. Démonstration du théorème 9.4.

Il faut montrer que, pour tous $a \in B$, $b \in B$, on a

$$d_{[a,b]} = [d_a, d_b].$$

On procède par composantes homogènes.

Soient f_m et g_m , respectivement, les composantes homogènes de degré m du premier et du second membre. Il s'agit de montrer que l'on a

$$f_m(y) = g_m(y) \text{ pour tout } y \in B.$$

Posons $\text{ad } y = D$. Il vient

$$f_m(y) = d_{[a,b]}(y) = t_m(\text{ad } y)^m[a, b] = t_m D^m[a, b].$$

D'autre part, on a

$$g_m(y) = \sum_{n+r=m+1} [d_{a,n}, d_{b,r}](y) = \sum_{n+r=m+1} (d_{a,n} \cdot d_{b,r} - d_{b,r} \cdot d_{a,n})(y).$$

Calcul de la dérivée $(d_{a,n} \cdot d_{b,r})(y)$. On se sert de l'application multilinéaire $u_{b,r}$ qui détermine le polynôme homogène $d_{b,r}$ (voir ci-dessus, au 9.3)

$$d_{b,r}(y) = u_{b,r}(y, \dots, y) = t_r D^r b,$$

et de la valeur

$$d_{a,n}(y) = t_n D^n a.$$

Il vient

$$(d_{a,n} \cdot d_{b,r})(y) = \sum_{1 \leq k \leq r} u_{b,r}(y, \dots, t_n D^n a^{\neg k}, \dots, y) = \sum_{1 \leq k \leq r} t_n u_{b,r}(y, \dots, D^n a^{\neg k}, \dots, y)$$

Or,

$$u_{b,r}(y, \dots, D^n a^{\neg k}, \dots, y) = t_r (D \circ \dots \circ D^n a^{\neg k} \circ \dots \circ D)(b) = t_r D^{k-1} [D^n a, D^{r-k} b].$$

D'où

$$(d_{a,n} \cdot d_{b,r})(y) = \sum_{1 \leq k \leq r} t_n t_r D^{k-1} [D^n a, D^{r-k} b].$$

De même

$$(d_{b,r} \cdot d_{a,n})(y) = \sum_{1 \leq k \leq n} t_n t_r D^{k-1} [D^r b, D^{n-k} a].$$

Ainsi,

$$g_m(y) = \sum_{n+r=m+1} t_n t_r \left(\sum_{1 \leq k \leq r} D^{k-1} [D^n a, D^{r-k} b] + \sum_{1 \leq k \leq n} D^{k-1} [D^{n-k} a, D^r b] \right).$$

On a donc, d'après le 9.9 ci-dessus,

$$g_m(y) = t_m D^m[a, b] = f_m(y). \quad \square$$

9.11. Sur l'origine de la notion d'action fondamentale.

Soit B une algèbre de Lie **normée complète**, réelle ou complexe.

On sait lui associer le **groupuscule de Lie défini par B** (voir Bourbaki [4], III, pages 168-169, dont on gardera, ici, les notations, autant que possible, sauf à remplacer le A par B).

Soit G ce groupuscule : c'est un voisinage ouvert de 0 dans B . Bien entendu, l'algèbre de Lie $L(G)$ du groupuscule G est identifiée à B .

Il existe, par hypothèse, un **morceau** de loi d'opération à droite, analytique, canonique, du groupuscule G sur la variété G : c'est une application, partiellement définie, $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto x.y$.

A ce morceau de loi, correspond une **loi d'opération infinitésimale** à droite, analytique, de $B = L(G)$ dans G (voir ibid. III, page 165, 18.7).

A chaque loi infinitésimale nous avons associé (ci-dessus, au paragraphe 6) une action formelle de l'algèbre de Lie B sur l'espace vectoriel B .

En l'occurrence, on a le résultat suivant.

9.12 Théorème. *L'action formelle associée à la loi d'opération infinitésimale de B dans le groupuscule G n'est autre que l'action fondamentale $d : B \rightarrow S(B)$ que nous venons de définir. < 15 >.*

On le vérifie, succinctement, comme suit.

Voici quelques détails supplémentaires afin de faciliter le *raccordement* de cette face **analytique** avec l'aspect **formel** que nous avons présenté.

Dans le groupuscule G , le produit $x.y$ est défini par la série de Hausdorff (voir Bourbaki [4], II, pages 55-57 et l'exercice 3, page 9, ainsi que III.4.2, page 168) :

$$x.y = H(x, y) = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[x, [x, y]] + \frac{1}{12}[y, [y, x]] + \dots$$

L'application *exponentielle* de l'algèbre de Lie B dans son groupuscule n'est autre que $f = \text{id}_B : B \rightarrow B$. Que dire de la *différentielle*

$$(D_a f)(b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{ta}.b - b}{t} = \frac{(ta).b - b}{t} ?$$

On a

$$(ta).b - b = H(ta, b) - b = ta + \frac{t}{2}[a, b] + \frac{t^2}{12}[a, [a, b]] + \frac{t}{12}[b, [b, a]] + \dots$$

Autrement dit, $(D_a f)(b)$ est donné par la série $H_1(a, b)$, somme des termes de $H(a, b)$ dont le degré en a est 1 : c'est-à-dire

$$(D_a f)(b) = H_1(a, b)$$

où (voir Bourbaki [4], II.6, exercice 3d, page 90),

$$H_1(a, b) = a + \frac{1}{2}[a, b] + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)!} b_{2n}(\text{ad } b)^{2n}(a),$$

les b_{2n} étant les nombres de BERNOULLI. Le théorème en découle. \square

Avec l'exemple originel (au paragraphe 6), c'est cela qui a été le point de départ de notre développement. C'est là que nous avons puisé une part de cette inspiration qui nous a conduit à la notion de produit d'entrelacement et d'action formelle.

9.13. Encore un petit mot de commentaire.

Lorsque B est une algèbre de Lie normée complète, réelle ou complexe, l'endomorphisme $(\text{ad } y)$ est un opérateur continu de l'espace B . La série entière $\sum_n t_n(\text{ad } y)^n$ est alors normalement convergente, avec un rayon de convergence infini. Elle définit donc une fonction analytique sur B , à valeurs dans l'espace des opérateurs continus de l'espace vectoriel B . Reprenant la série génératrice G du 9.1, on peut ainsi écrire

$$G(\text{ad } y) = \sum_n t_n(\text{ad } y)^n.$$

Dans le cas général, **purement algébrique**, on peut encore écrire, **formellement**,

$$d_b(y) = \sum_n t_n(\text{ad } y)^n(b) = G(\text{ad } y)(b).$$

On va donner une justification de cette écriture et un mot d'explication au sujet de la nature de la série

$$G(\text{ad } y) = \sum_n t_n(\text{ad } y)^n.$$

Pour $b \in B$ fixé, la série $\sum_n t_n(\text{ad } y)^n(b)$ appartient à $S(B)$. Comme fonction, à la fois, de y et de b , elle appartient à $S(B)[[B]]$ lequel est identifié à $B[[B, B]]$.

{En posant

$$w(y_1, \dots, y_n, b) = t_n(\text{ad } y_1) \circ (\text{ad } y_2) \circ \dots \circ (\text{ad } y_n)(b),$$

$$u_b(y_1, \dots, y_n) = v_{(y_1, \dots, y_n)}(b) = t_n(\text{ad } y_1) \circ (\text{ad } y_2) \circ \dots \circ (\text{ad } y_n)(b),$$

on obtient une application multilinéaire $w \in L_{(n,1)}(B, B; B)$ qui s'identifie, d'une part à l'application $u \in L_1(B; L_n(B; B))$ et, d'autre part, à $v \in L_n(B; L_1(B; B))$. De sorte que

$w(y, \dots, y, b)$ est un polynôme homogène de bidegré $(n, 1)$ et appartient ainsi à $B[B, B]_{(n,1)}$, tandis que les polynômes homogènes $u_b(y, \dots, y)$ et $v_{(y, \dots, y)}(b)$ appartiennent, respectivement, à $S(B)_n[B]_1$ et $S(B)_1[B]_n$.

Pour $y \in B$ donné, $(\text{ad } y)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel B , autrement dit, un opérateur linéaire $(\text{ad } y) \in L_1(B, B) = \text{End}(B)$. Ainsi, $(\text{ad } y)$, comme fonction de y , est un polynôme homogène de degré 1 à variables dans B et coefficients dans $\text{End}(B)$; c'est un élément de $\text{End}(B)[B]_1$. Plus généralement, on a $(\text{ad } y)^n \in \text{End}(B)[B]_n$ donc $\sum_n t_n (\text{ad } y)^n \in \text{End}(B)[[B]] \subset S(B)[[B]]$.

Lorsque l'opérateur $(\text{ad } y)$ est **nilpotent**, $\sum_n t_n (\text{ad } y)^n$ est une somme **finie** et représente un élément de $\text{End}(B)$ que l'on peut encore désigner, sans grand danger, par $G(\text{ad } y)$. En particulier, lorsque l'algèbre de Lie B est **nilpotente**, $G(\text{ad } y)$ est un polynôme en y appartenant à $\text{End}(B)[B]$.

Sinon, dans le cas général, voici comment justifier l'écriture

$$G(\text{ad } y) = \sum_n t_n (\text{ad } y)^n.$$

On commence par observer, brièvement, ceci. Lorsque E est une K -algèbre, où \circ désigne la multiplication, l'ensemble de séries formelles $E[[X]]$ hérite de la structure de K -algèbre de E , avec la multiplication naturelle des polynômes homogènes : $(f_n \circ g_r)(x) = f_n(x) \circ g_r(x)$. Si, de plus, la K -algèbre E est associative et possède une unité 1, alors l'anneau des séries formelles $K[[T]]$ est (isomorphe à) une sous-algèbre de $E[[X]]$. La série formelle e^T , ainsi que la série génératrice

$$G(T) = \frac{T e^T}{e^T - 1} = \sum_n t_n T^n,$$

sont donc des éléments de $E[[X]]$.

Dans le cas particulier où $E = X = \text{End}(B)$, il devient clair que l'on a $G(T) \in S(\text{End}(B))$. Ainsi, $G(\text{ad } y)$ n'est autre que la série que l'on obtient en substituant le polynôme homogène, de degré 1, $(\text{ad } y)$ à T dans la série formelle $G(T)$. On a aussi

$$G(\text{ad } y) = \frac{(\text{ad } y) e^{(\text{ad } y)}}{e^{(\text{ad } y)} - 1}.$$

L'exponentielle $e^{\text{ad } y}$ s'écrivant, traditionnellement, $\text{Ad } y$, il vient aussi

$$G(\text{ad } y) = \frac{(\text{ad } y) \text{Ad } y}{\text{Ad } y - 1}.$$

10. LE PRODUIT D'ENTRELACEMENT DE DEUX ALGÈBRES DE LIE

À chaque action formelle donnée, $d : B \rightarrow S(Y)$, correspond un produit d'entrelacement $W(A, B; d) = A[[Y]] \times B$, comme on l'a dit plus haut (au paragraphe 7). Parmi tous ces produits d'entrelacement, il en est un, particulier, que l'on désignera, simplement, par $W(A, B)$: c'est celui qui correspond à l'action fondamentale $d : B \rightarrow S(B)$ de l'algèbre de Lie B sur elle-même. D'une certaine manière, il est **intrinsèque**. Comme dans le cas des groupes abstraits, ce produit $W(A, B) = A[[B]] \times B$ agit *en cascade* sur l'espace vectoriel produit $A \times B$, en une action *triangulaire*.

Lorsque $d : B \rightarrow S(B)$ est l'**action fondamentale** que l'on vient de définir, on obtient un cas particulier important de produit d'entrelacement $W(A, B; d)$: on appellera ce cas particulier le **produit d'entrelacement (fondamental)** de l'algèbre de Lie B par l'algèbre de Lie A et on le désignera, simplement, par $W(A, B)$. C'est lui que l'on essayait de définir, au départ, et lui qui a donné lieu aux présents développements.

10.1. L'essentiel. Rappelons comment est construit $W(A, B)$, en se référant au paragraphe 7 ci-dessus.

Ici, $\text{Der}(A : B)$ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{d}(A[[B]])$ des dérivations de l'algèbre de Lie $A[[B]]$.

A chaque $b \in B$, l'homomorphisme $\sigma : B \rightarrow \text{Der}(A : B)$ associe la dérivation $\sigma(b) \in \mathfrak{d}(A[[B]])$, dérivation suivant la série formelle $d_b \in S(B)$:

$$d_b(y) = \sum_n t_n (\text{ad } y)^n(b) = G(\text{ad } y)(b).$$

Enfin, $W(A, B) = A[[B]] \times B$ est le **produit semi-direct** de l'algèbre de Lie B par l'algèbre de Lie $A[[B]]$ relativement à l'homomorphisme σ . Le crochet y est défini, comme au 7.3 ci-dessus, par la formule suivante : étant donnés deux éléments (f, b) et (g, c) de $W(A, B)$, on a

$$[(f, b), (g, c)] = ([f, g] + d_b \cdot g - d_c \cdot f, [b, c]),$$

où le crochet $[f, g]$ est celui que $A[[B]]$ hérite de A (voir ci-dessus au 5.1).

10.2. Les détails. Afin d'abréger, pour désigner la dérivée d'une série formelle donnée $f \in A[[B]]$ suivant la série formelle d_b , celle de l'action fondamentale, on écrira $b \star f$ au lieu de $d_b \cdot f$:

$$\boxed{b \star f = d_b \cdot f.}$$

Toute série formelle $f \in A[[B]]$ se met sous une forme canonique $f(x) = \sum_m u_m(x, \dots, x)$ où u_m est une application m -linéaire **symétrique**, $u_m \in L_m(A; B)$, (voir ci-dessus au 2.8). Pour la dérivée de cette série f suivant la série d_b , on a la formule suivante (voir ci-dessus au 3.3)

$$(b \star f)(x) = (d_b \cdot f)(x) = \sum_m m u_m(d_b(x), x, \dots, x).$$

Autrement dit,

$$(b \star f)(x) = \sum_m \sum_n mu_m(t_n(\text{ad } x)^n(b), x, \dots, x).$$

On a ainsi le formulaire suivant

$$(b \star f)_m(x) = \sum_{n+r=m+1} t_n ru_r((\text{ad } x)^n b, x, \dots, x).$$

$$[(f, b), (g, c)] = ([f, g] + b \star g - c \star f, [b, c]),$$

$$[f, g](x) = [f(x), g(x)] \quad (\text{le crochet de } A), \quad [b, c] \quad (\text{le crochet de } B).$$

10.3. L'action triangulaire. En introduisant également l'action fondamentale $D : A \rightarrow S(A)$, voici la description de l'action triangulaire fondamentale de $W(A, B)$ sur $A \times B$.

C'est, en quelque sorte, le produit d'entrelacement $\Delta = \Delta(D, d)$ des deux actions fondamentales $d : B \rightarrow S(B)$ et $D : A \rightarrow S(A)$ (voir, ci-dessus, au paragraphe 8). Cette application $\Delta : W \rightarrow S(A \times B)$ associe, à chaque couple $(a, b) \in A[[B]] \times B$, l'élément suivant de $S(A \times B)$:

$$\Delta_{(a,b)} = D_a + d_b.$$

Elle agit de la manière suivante : pour chaque couple $(x, y) \in A \times B$, on a

$$\Delta_{(a,b)}(x, y) = D_{a(y)}(x) + d_b(y).$$

Disons, de nouveau, qu'elle est **triangulaire** dans le sens où elle comporte trois temps : l'action d , en position b , commence par agir sur le point y de B pour donner $d_b(y)$ puis l'élément a de $A[[B]]$ agit sur le point y de B pour fournir $a(y) = a_0(y) + a_1(y) + a_2(y) + \dots$ ce qui enclenche l'action D en position $a(y)$ et fait agir $D_{a(y)}$ sur le point x de A pour donner $D_{a(y)}(x) = D_{a_0(y)}(x) + D_{a_1(y)}(x) + D_{a_2(y)}(x) + \dots$

C'est une action *en cascade*, pour ainsi dire.

EXEMPLES DE PRODUITS $W(A, B)$

10.4. Un premier exemple. Dans le cas où les deux algèbres de Lie A et B ont une dimension égale à 1, $A[[B]]$ est identifié à l'anneau classique $K[[x]]$ de séries formelles, (voir ci-dessus au 1.3.1), de sorte que l'on a $W(A, B) = K[[x]] \times K$. L'algèbre de Lie B étant commutative, $(\text{ad } y)$ est nul et l'action fondamentale d_b se réduit à $d_b = b$. La série formelle $f(x) = \sum a_m x^m \in A[[B]] = K[[x]]$ étant donnée, soit $f'(x) = \sum m a_m x^{m-1}$ sa dérivée formelle. On a $(b \star f)(x) = (d_b.f)(x) = b f'(x)$. Les crochets de A et de B étant nuls, tous deux, celui de $W(A, B)$ est alors donné par

$$[(f, b), (g, c)] = (b \star g - c \star f, 0) = (b g' - c f', 0).$$

10.5. Un deuxième exemple. Plus généralement, supposons que B soit une algèbre de Lie commutative, de dimension finie r , et A une algèbre de Lie de dimension 1. Alors $A[[B]]$ est identifié à l'anneau classique de séries formelles $K[[x_1, \dots, x_r]]$. De nouveau, l'action fondamentale est réduite à $d_b = b$. Pour

$$b = (b_1, \dots, b_r) \in B, \quad x = (x_1, \dots, x_r), \quad f(x) \in K[[x_1, \dots, x_r]],$$

on a

$$(b \star f)(x) = (d_b \cdot f)(x) = b_1 f'_{x_1}(x) + \dots + b_r f'_{x_r}(x).$$

Les crochets de A et de B étant nuls, de nouveau, celui de $W(A, B)$ s'écrit encore

$$[(f, b), (g, c)] = (b \star g - c \star f, 0) = \left(\sum_i (b_i g'_{x_i} - c_i f'_{x_i}), 0 \right).$$

10.6. Un troisième exemple. On suppose que l'algèbre de Lie B est nilpotente et, par exemple, que $(\text{ad } y)^3$ est nul pour tout $y \in B$. L'action fondamentale est alors donnée par

$$d_b(y) = b + \frac{1}{2}[y, b] + \frac{1}{12}[y, [y, b]].$$

Pour $f = \sum_m u_m(x, \dots, x)$, sous forme canonique, on a ainsi

$$(b \star f)_0(x) = u_1(b), \quad (b \star f)_1(x) = 2u_2(b, x) + \frac{1}{2}u_1([x, b]),$$

$$(b \star f)_2(x) = 3u_3(b, x, x) + u_2([x, b], x) + \frac{1}{12}u_1([x, [x, b]]),$$

$$(b \star f)_m(x) = \sum_{n+r=m+1, n \leq 2} t_n r u_r((\text{ad } x)^n b, x, \dots, x).$$

Le crochet de $W(A, B)$ s'écrit

$$[(f, b), (g, c)] = ([f, g] + b \star g - c \star f, [b, c]).$$

11. REPRÉSENTATION DES EXTENSIONS DANS LE PRODUIT D'ENTRELACEMENT

Comme dans le cas des groupes abstraits, le résultat suivant illustre la singularité du produit d'entrelacement fondamental $W(A, B)$. Toute algèbre de Lie C qui est une extension de B par A est isomorphe à une sous-algèbre de Lie de $W(A, B)$.

Voici, à présent, un théorème qui montre que l'on peut représenter toute extension C de l'algèbre de Lie B par l'algèbre de Lie A dans leur produit d'entrelacement $W(A, B)$.

Il s'agit de l'analogie pour les algèbres de Lie du premier théorème de Kaloujnine-Krasner pour les groupes abstraits (voir [6]).

Soit $A \rightarrow C \xrightarrow{p} B$ une extension de l'algèbre de Lie B par l'algèbre de Lie A . Autrement dit, p est un homomorphisme surjectif de l'algèbre de Lie C sur l'algèbre de Lie B dont le noyau est la sous-algèbre $A = \{c \in C : p(c) = 0\}$.

On se fixe une application K -linéaire $s : B \rightarrow C$ quelconque telle que $p \circ s = \text{id}_B$. Autrement dit, s est une **section linéaire** de p .

On va associer à s un homomorphisme $f_s : C \rightarrow W(A, B)$ d'algèbres de Lie que l'on appellera la **représentation associée** à s .

On présentera cet homomorphisme f_s par étapes, comme suit.

11.0. Nota. Afin de rendre plus claire la lecture des calculs compliqués qui vont suivre, on omettra les parenthèses et le symbole \circ de composition des fonctions partout où le risque de confusion est **minime**. De plus, pour simplifier, on introduira les notations suivantes. Pour $y \in B$ fixé, on pose

$$D = \text{ad } y, \quad z = s(y), \quad R = \text{ad } z = \text{ad } sy.$$

On posera aussi $e = \text{sp}$, (c'est une application linéaire $e : C \rightarrow C$), et on observera ceci :

$$pe = p \quad \text{et} \quad es = s \quad \text{puisque} \quad ps = \text{id}_B.$$

Ainsi, D est une dérivation de l'algèbre de Lie B tandis que R est une dérivation de l'algèbre de Lie C . En particulier, on a $pR = Dp$. On a ainsi, par récurrence, $pR^n = D^n p$ pour tout n . On a donc, plus généralement, pour tout $k \geq 0$,

$$pR^n eR^k = D^n p eR^k = D^n p R^k = D^n D^k p = D^{n+k} p = pR^{n+k}.$$

Autrement dit,

$$pR^n eR^k = D^{n+k} p = pR^{n+k}.$$

On se servira de cette dernière identité, dans les deux sens, comme d'une *fermeture éclair*, de gauche à droite et de droite à gauche.

11.1. Définition de h_c .

Pour $c \in C$, $y \in B$ et m donnés, on pose

$$h_{c,m}(y) = \frac{1}{m!} (\text{ad } z)^m(c) - \sum_{n+r=m} \frac{t_r}{(n+1)!} (\text{ad } z)^n (s \circ p) (\text{ad } z)^r(c)$$

où les coefficients t_r sont définis par la série génératrice $G(T)$ introduite, ci-dessus, au **9.1**. Autrement dit,

$$h_{c,m}(y) = \frac{1}{m!} R^m c - \sum_{n+r=m} \frac{t_r}{(n+1)!} R^n e R^r c.$$

L'élément $h_{c,m}(y)$ ainsi défini appartient visiblement à l'algèbre de Lie C . En fait, il appartient plus précisément à A .

11.2. Lemme. < 16 >. Pour tous $c \in C$, $y \in B$, on a

$$h_{c,m}(y) \in A.$$

En effet, on calcule

$$\begin{aligned} \text{ph}_{c,m}(y) &= \frac{1}{m!} D^m \text{pc} - \sum_{n+r=m} \frac{t_r}{(n+1)!} D^n (\text{psp}) R^r c = \\ &= \frac{1}{m!} D^m \text{pc} - \sum_{n+r=m} \frac{t_r}{(n+1)!} D^{n+r} \text{pc} = \left(\frac{1}{m!} - \sum_{n+r=m} \frac{t_r}{(n+1)!} \right) D^m \text{pc} = 0 \end{aligned}$$

d'après le lemme **9.6**. \square

Cela prouve que $h_{c,m}$, comme polynôme homogène en y , appartient à $A[B]_m$.

On considère la série formelle $h_c = \sum_m h_{c,m}$, de sorte que l'on a $h_c \in A[[B]]$. On pose enfin

$$f_s(c) = (h_c, \text{pc}).$$

On a ainsi $f_s(c) \in A[[B]] \times B = W(A, B)$ et l'application $f_s : C \rightarrow W(A, B)$ est linéaire. Plus précisément, on a le résultat suivant.

11.3. Théorème. < 17 >.

*Soit $A \rightarrow C \xrightarrow{\text{p}} B$ une extension de l'algèbre de Lie B par l'algèbre de Lie A . Pour toute section linéaire $s : C \rightarrow B$ de p , la représentation associée $f_s : C \rightarrow W(A, B)$ est un homomorphisme **injectif** de l'algèbre de Lie C dans le produit d'entrelacement $W(A, B)$.*

Démonstration.

1. L'application linéaire f_s est injective.

En effet, si $f_s(c) = 0$ alors, d'une part, on a $\text{pc} = 0$ et, d'autre part, on a $h_{c,0} \equiv 0$. Or, $h_{c,0} = c - \text{spc}$ donc $c = 0$. \square

2. L'application f_s est un homomorphisme. Cette longue démonstration s'étend sur les pages 48 à 52.

Soient $a \in C$ et $b \in C$. Il s'agit de montrer que l'on a

$$(h_{[a,b]}, p[a, b]) = ([h_a, h_b] + pa \star h_b - pb \star h_a, [pa, pb])$$

et, puisque $p[a, b] = [pa, pb]$, cela revient à montrer que l'on a

$$h_{[a,b]} = [h_a, h_b] + pa \star h_b - pb \star h_a.$$

Afin de rendre les calculs plus faciles, on introduit les polynômes homogènes suivants qui appartiennent à $C[[B]]$:

$$u_{c,m} = \frac{1}{m!} R^m c, \quad v_{c,m} = \sum_{n+r=m} \frac{t_r}{(n+1)!} R^n e R^r c$$

puis les séries formelles

$$u_c = \sum_m u_{c,m}, \quad v_c = \sum_m v_{c,m}, \quad \text{de sorte que } h_c = u_c - v_c.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} h_{[a,b]} &= u_{[a,b]} - v_{[a,b]}, \\ pa \star h_b - pb \star h_a &= pa \star u_b - pb \star u_a - pa \star v_b + pb \star v_a. \end{aligned}$$

Rappel des données du calcul. On a

$$d_{pa,n}(y) = t_n(\text{ad } y)^n(pa) = t_n D^n pa = t_n p R^n a.$$

L'algèbre de Lie C agit sur B au travers de l'application composée

$$C \xrightarrow{p} B \xrightarrow{d} S(B).$$

On va établir, successivement, les identités suivantes

$$(1) \quad u_{[a,b]} = [u_a, u_b].$$

$$(2) \quad pa \star u_b = [v_a, u_b] \quad \text{et donc} \quad pb \star u_a = [v_b, u_a].$$

$$(3) \quad pa \star v_b - pb \star v_a = [v_a, v_b] + v_{[a,b]}.$$

D'où découlera ceci :

$$\begin{aligned} &[h_a, h_b] + pa \star h_b - pb \star h_a = \\ &[u_a, u_b] - [u_a, v_b] - [v_a, u_b] + [v_a, v_b] + [v_a, u_b] - [v_b, u_a] - [v_a, v_b] - v_{[a,b]} = u_{[a,b]} - v_{[a,b]} = h_{[a,b]}. \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Voici le détail des calculs. Tous les indices qui interviennent (muets ou non) sont des entiers ≥ 0 .

(1) On a

$$u_{[a,b],m}(y) = \frac{1}{m!} R^m[a, b].$$

D'autre part, on a

$$[u_a, u_b]_m(y) = \sum_{n+r=m} [u_{a,n}, u_{b,r}](y) = \sum_{n+r=m} \frac{1}{n!r!} [R^n a, R^r b].$$

La formule de Leibniz donne l'égalité (1) souhaitée.

(2) On a

$$(pa \star u_b)_m(y) = \sum_{\substack{j+l=m \\ k \leq l}} \frac{t_j}{(l+1)!} R^k [eR^j a, R^{l-k} b].$$

Le lemme 9.8(1), appliqué à la dérivation R de l'algèbre C , donne

$$\sum_{k \leq l} R^k [eR^j a, R^{l-k} b] = \sum_{i \leq l} \binom{l+1}{i+1} [R^i eR^j a, R^{l-i} b],$$

donc

$$\frac{t_j}{(l+1)!} \sum_{k \leq l} R^k [eR^j a, R^{l-k} b] = \sum_{r \leq l} \frac{t_j}{(i+1)!r!} [R^i eR^j a, R^r b].$$

D'autre part, on a

$$[v_a, u_b]_m(y) = \sum_{n+r=m} [v_{a,n}, u_{b,r}](y) = \sum_{i+j+r=m} \frac{t_j}{(i+1)!r!} [R^i eR^j a, R^r b].$$

D'où découle l'égalité (2) annoncée.

(3) Calcul de $(pa \star v_b - pb \star v_a)_m(y)$. Pour ce calcul, le plus compliqué, on introduit

$$w_{c,n,r}(y) = t_r R^n eR^r c$$

afin d'écrire

$$v_{c,m} = \sum_{n+r=m} \frac{1}{(n+1)!} w_{c,n,r}.$$

On a

$$(pR^n a) \cdot (R^j eR^r b) = \sum_{k \leq j-1} R^k [eR^n a, R^{j-k-1} eR^r b] + \sum_{k \leq r-1} R^j eR^k [eR^n a, R^{r-k-1} b].$$

En utilisant la *fermeture éclair*, il vient

$$(\mathbf{p}R^n a).(R^j eR^r b) = \sum_{k \leq j-1} R^k [eR^n a, R^{j-k-1} eR^r b] + \sum_{k \leq r-1} R^j s D^k [D^n \mathbf{p}a, D^{r-k-1} \mathbf{p}b].$$

En échangeant a et b d'une part, et n et r d'autre part, il vient

$$(\mathbf{p}R^r b).(R^j eR^n a) = \sum_{k \leq j-1} R^k [eR^r b, R^{j-k-1} eR^n a] + \sum_{k \leq n-1} R^j s D^k [D^r \mathbf{p}b, D^{n-k-1} \mathbf{p}a].$$

D'où

$$\begin{aligned} (d_{\mathbf{p}a,n} \cdot w_{b,j,r} - d_{\mathbf{p}b,r} \cdot w_{a,j,n})(y) &= t_n t_r ((\mathbf{p}R^n a).(R^j eR^r b) - (\mathbf{p}R^r b).(R^j eR^n a)) = \\ &= t_n t_r \sum_{k \leq j-1} (R^k [eR^n a, R^{j-k-1} eR^r b] - R^k [eR^r b, R^{j-k-1} eR^n a]) + \\ &= t_n t_r R^j s \left(\sum_{k \leq r-1} D^k [D^n \mathbf{p}a, D^{r-k-1} \mathbf{p}b] - \sum_{k \leq n-1} D^k [D^r \mathbf{p}b, D^{n-k-1} \mathbf{p}a] \right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}a \star v_b)_m &= \sum_{n+s=m+1} (d_{\mathbf{p}a,n} \cdot v_{b,s}) = \sum_{n+s=m+1} d_{\mathbf{p}a,n} \sum_{j+r=s} \frac{1}{(j+1)!} w_{b,j,r} = \\ &= \sum_{n+j+r=m+1} \frac{1}{(j+1)!} d_{\mathbf{p}a,n} \cdot w_{b,j,r}. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$(\mathbf{p}a \star v_b)_m(y) = \sum_{n+j+r=m+1} \frac{t_n t_r}{(j+1)!} (\mathbf{p}R^n a).(R^j eR^r b).$$

Donc

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}a \star v_b - \mathbf{p}b \star v_a)_m(y) &= \sum_{n+j+r=m+1} \frac{t_n t_r}{(j+1)!} ((\mathbf{p}R^n a).(R^j eR^r b) - (\mathbf{p}R^r b).(R^j eR^n a)) = \\ &= \sum_{n+j+r=m+1} \frac{t_n t_r}{(j+1)!} \sum_{k \leq j-1} (R^k [eR^n a, R^{j-k-1} eR^r b] - R^k [eR^r b, R^{j-k-1} eR^n a]) + \\ &= \sum_{n+j+r=m+1} \frac{t_n t_r}{(j+1)!} R^j s \left(\sum_{k \leq r-1} D^k [D^n \mathbf{p}a, D^{r-k-1} \mathbf{p}b] - \sum_{k \leq n-1} D^k [D^r \mathbf{p}b, D^{n-k-1} \mathbf{p}a] \right). \end{aligned}$$

On a

$$[v_a, v_b]_m(y) = \sum_{n+r+i+k=m} \frac{t_n t_r}{(i+1)!(k+1)!} [R^i eR^n a, R^k eR^r b].$$

La différence $(pa \star v_b - pb \star v_a - [v_a, v_b])_m(y)$.

Pour m, n, r , fixés, le coefficient de $t_n t_r$ dans cette différence est

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-n-r+1} \frac{1}{(j+1)!} \sum_{k \leq j-1} (R^k [eR^n a, R^{j-k-1} eR^r b] - R^k [eR^r b, R^{j-k-1} eR^n a]) + \\ & \sum_{j=m-n-r+1} \frac{1}{(j+1)!} \sum_{k \leq r-1} (R^j eR^k [eR^n a, R^{r-k-1} b] - R^j eR^k [eR^r b, R^{n-k-1} a]) - \\ & \sum_{n+r+i+k=m} \frac{1}{(i+1)!(k+1)!} [R^i eR^n a, R^k eR^r b]. \end{aligned}$$

La différence

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-n-r+1} \frac{1}{(j+1)!} \sum_{0 \leq k \leq j-1} R^k [eR^n a, R^{j-k-1} eR^r b] - R^k [eR^r b, R^{j-k-1} eR^n a]) - \\ & \sum_{n+r+i+k=m} \frac{1}{(i+1)!(k+1)!} [R^i eR^n a, R^k eR^r b], \end{aligned}$$

est nulle.

En effet, le premier membre s'écrit

$$\frac{1}{(j+1)!} \sum_{k \leq j-1} (R^k [eR^n a, R^{j-k-1} eR^r b] + R^k [R^{j-k-1} eR^n a, eR^r b]),$$

où $j = m - n - r + 1$.

Dans l'identité 9.8(2), en remplaçant m, a, b, D , respectivement, par $(j-1), eR^n a, eR^r b, R$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(j+1)!} \sum_{k \leq j-1} (R^k [eR^n a, R^{j-k-1} eR^r b] + R^k [R^{j-k-1} eR^n a, eR^r b]) = \\ & \frac{1}{(j+1)!} \sum_{i \leq j-1} \binom{j+1}{i+1} [R^i eR^n a, R^{j-i-1} eR^r b] = \\ & \sum_{i \leq j-1} \frac{1}{(i+1)!(j-i)!} [R^i eR^n a, R^{j-i-1} eR^r b]. \end{aligned}$$

Puisque $j-1 = m - n - r$, le second terme s'écrit

$$\sum_{k=j-i-1} \frac{1}{(i+1)!(k+1)!} [R^i eR^n a, R^k eR^r b]$$

et, en remplaçant k par $j - i - 1$,

$$\sum_{i \leq j-1} \frac{1}{(i+1)!(j-i)!} [R^i e R^n a, R^{j-i-1} e R^r b]. \quad \square$$

On a

$$\begin{aligned} v_{[a,b],m}(y) &= \sum_j \frac{t_{m-j}}{(j+1)!} R^j e R^{m-j} [a, b] = \sum_j \frac{t_{m-j}}{(j+1)!} R^j s(p R^{m-j} [a, b]) = \\ &= \sum_j R^j s \frac{t_{m-j}}{(j+1)!} D^{m-j} [pa, pb]. \end{aligned}$$

La différence

$$\begin{aligned} \sum_{j=m-n-r+1} \frac{t_n t_r}{(j+1)!} R^j s \sum_{k \leq r-1} D^k [D^n pa, D^{r-k-1} pb] - \sum_{k \leq n-1} D^k [D^r pb, D^{n-k-1} pa] - \\ \sum_j R^j s \frac{t_{m-j}}{(j+1)!} D^{m-j} [pa, pb] \end{aligned}$$

est également est nulle.

En effet, d'après l'identité 9.9, pour m et j fixés, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n+r=m-j+1} t_n t_r \sum_{k \leq r-1} D^k [D^n pa, D^{r-k-1} pb] - \sum_{k \leq n-1} D^k [D^r pb, D^{n-k-1} pa] = \\ t_{m-j} D^{m-j} [pa, pb]. \end{aligned}$$

L'identité (3) en découle. Ce qui achève la démonstration du théorème. $\square \quad \square$

11.4. Dernières remarques.

Avec les notations ci-dessus, dans la formule $f_s(c) = (h_c, pc)$, la série formelle h_c peut s'écrire

$$h_c = \left(e^R - \frac{e^R - 1}{R} e \frac{R e^R}{e^R - 1} \right) c = \left(\text{Ad } z - \frac{\text{Ad } z - 1}{\text{ad } z} \text{ sp } G(\text{ad } z) \right) c,$$

l'exponentielle $e^R = e^{\text{ad } z}$ s'écrivant, traditionnellement, $\text{Ad } z$.

Le plongement f_s de C dans $W(A, B)$ dépend de la section linéaire $s : B \rightarrow C$ choisie et il y a une grande variété de choix pour s , autant que de supplémentaires du sous-espace vectoriel A dans l'espace vectoriel C . Pour tout $a \in A$, on a

$$h_a = (\text{Ad } z)a = (\text{Ad } sy)a,$$

de sorte que

$$f_s(a) = ((\text{Ad } sy)a, 0)$$

dépend également de s .

Bien entendu, l'algèbre de Lie $W(A, B)$, en tant que produit semi-direct, est une extension **inessentielle** de l'algèbre de Lie B par l'algèbre de Lie $A[[B]]$.

En guise de conclusion. Le cas où le corps K est **fini** n'a pas été abordé. Il mérite, sans doute, d'être examiné attentivement. On obtiendrait ainsi des produits d'entrelacement **finis** qui pourraient présenter des aspects combinatoires intéressants.

Le second auteur assume l'entière responsabilité de toutes les erreurs qui seront relevées dans ce texte pour avoir échappé à sa vigilance.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki, N., *Variétés différentielles et analytiques, Fascicule des résultats, paragraphes 1 à 7*, Hermann, Paris, 1967.
2. ———, *Variétés différentielles et analytiques, Fascicule des résultats, paragraphes 8 à 15*, Hermann, Paris, 1971.
3. ———, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 1*, Hermann, Paris, 1972.
4. ———, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 2 et 3*, Hermann, Paris, 1972.
5. Kirillov, A., *Eléments de la théorie des représentations, traduction française*, Editions Mir , Moscou, 1974.
6. Neumann, H., *Varieties of groups (theorem 22.21)*, Springer , Berlin, 1967, pp. 45-46.
7. Coffi-Nketsia B.-J. and Haddad L., *Produit d'entrelacement et action triangulaire d'algèbres de Lie*, [arXiv:math.RT/0704.3840v1](#).